Μάθημα 10 – 23.03.2023
ΓΡΑΦΕΙΣ
Μαίρη Αηδόνη
Μιράντα Λουμιώτη

23.03.2023.

Ασκήσεις από βιβλίο Ross
Κεφάλαιο 2: 2.1–2.6, 2.8*, 2.9*, 2.11, 2.12, 2.18*, 2.19, 2.20
Κεφάλαιο 3: 3.1, 3.3*, 3.4–3.7, 3.9–3.11, 3.15, 3.16*, 3.22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

γενικά μια τυχαία μεταβλητή είναι μία αριθμητική μεταβλητή (ένας πραγματικός αριθμός) της οποίας η τιμή εξαρτάται από την έκβαση ενός πειράματος τύχης.

διαφορά με αποτέλεσμα ενός π.τ. (πειράματος τύχης):

στη ρίψη δύο ζαριών, το (3,6) είναι αποτέλεσμα

Το άθροισμα 3+6 είναι μία τυχαία μεταβλητή

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω (διακριτός) χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$.
Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή είναι μία συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Παράδειγμα:
Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και κοιτάμε το άθροισμα των δύο ζαριών.

αποτελέσματα (ω)	άθροισμα (x)
(1,1)	2
(1,2)	3
(1,3)	4
(1,4)	5
(1,5)	6
(1,6)	7
(2,1)	3
(2,2)	4
(2,3)	5
(2,4)	6
(2,5)	7
(2,6)	8
⋮	⋮

(διαφορά μεταξύ αποτελέσματος και αθροίσματος)

Παράδειγμα 2:

Ρίχνω το ζάρι μέχρι όταν φέρω 6. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων. Τότε η X είναι μία τ.μ..

1η ρίψη	2η ρίψη	3η ρίψη	
1	1	1	
2	2	2	
3	3	3	...
4	4	4	
5	5	5	
6 ⊗	6 ⊗	6 ⊗	

$$\Omega = \{ \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{} : \underset{\uparrow \ \#\text{ρίψεων}}{n \in \mathbb{N}}, \ \underset{\uparrow \ \text{κάθε ψηφίο από 1-5}}{a_1, \ldots, a_{n-1} \in \{1,2,3,4,5\}}, \ \underset{\uparrow \ \text{τελικό ψηφίο}}{a_n = 6} \}$$

[Πιθανές εκβάσεις του π.τ. είναι π.χ.:
→ 1, 3, 6 ή → 2, 4, 5, 3, 6 ή → 6 ή → 3, 3, 2, 1, 3, 5, 3, 6 ή → 2, 4, 6]

Η τ.μ. X που μετράει τον αριθμό ρίψεων θα είναι:

$$\underset{\uparrow \ \text{τ.μ.}}{X}(\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{\omega \ \text{αποτέλεσμα}}) = \underset{\uparrow}{n}$$

τιμή της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα $\omega = a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Παράδειγμα 3:

Ρίχνουμε δύο ζάρια και μελετάμε το άθροισμα X των δύο ρίψεων. Να βρεθεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(X=k)$, $k = 2, \ldots, 12$. Ποιος είναι ο δ.χ.;

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ 2 & (2,1) & & & \vdots & & \\ 3 & & & & \vdots & & \\ 4 & & \cdots & & \vdots & \cdots & \\ 5 & & & & \vdots & & \\ 6 & & & & \vdots & & \end{array} \right\}$$

	1	2	3	4	5	6
1	$\omega=(1,1)$ $x=2$	$\omega=(1,2)$ $x=3$	$\omega=(1,3)$ $x=4$	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\mathbb{P}(X=2) = 1/36$
$\mathbb{P}(X=3) = 2/36$
$\mathbb{P}(X=4) = 3/36$
$\mathbb{P}(X=5) = 4/36$
$\mathbb{P}(X=6) = 5/36$
$\mathbb{P}(X=7) = 6/36$
$\mathbb{P}(X=8) = 7/36$
$\vdots$

συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$p(2) \ldots$

$p(3) = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) = 3\} = \mathbb{P}\{(1,2), (2,1)\} = 2/36.$

$p(4) = \ldots$

$p(5) = \ldots$

$\vdots$

(*)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω (διακριτός) χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$ και έστω διακριτή Τ.Μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Ως **συνάρτηση μάζας πιθανότητας** της X ορίζεται η συνάρτηση $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \equiv \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) = x\}$

συνήθως εννοείται από τα συμφραζόμενο

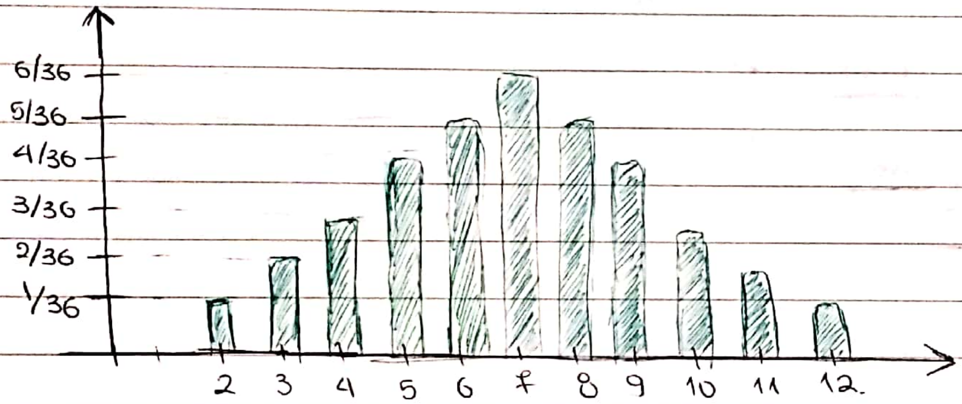
(ή αλλιώς $= \mathbb{P}(X^{-1}(x))$)

* άλλο το X και άλλο το x.

④ Πίνακας πιθανοτήτων.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

/36



Ερώτηση: Έστω δύο Τ.Μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω. $p_X = p_Y$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $X = Y$; ΟΧΙ!

Παράδειγμα: δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος $\{0,1\}$.

ω	X (AND)	Y (NOR)
(0,0)	0	1
(0,1)	0	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	0

$\begin{cases} p_{AND}(0) = 3/4 \\ p_{AND}(1) = 1/4 \end{cases}$ $\quad p_{AND} = p_{NOR}$

$\begin{cases} p_{NOR}(0) = 3/4 \\ p_{NOR}(1) = 1/4 \end{cases}$ $\quad AND \neq NOR$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $p_X \equiv p_Y$ για δύο Τ.Μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, θα γράφω $X \stackrel{d}{=} Y$

είναι ίσα κατά κατανομή

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $X \stackrel{d}{=} Y \not\Rightarrow X = Y$

[όταν δεν θα έχω τιμές από το 1-10, αλλά μπορεί να έχω πάρα πολλές τιμές, και άρα πολύ μεγάλη πυκνότητα (δεν θα έχω πια διακριτά σημεία αλλά συνεχής συνάρτηση), δεν με βοηθάει η συνάρτηση μάζας πιθ.]

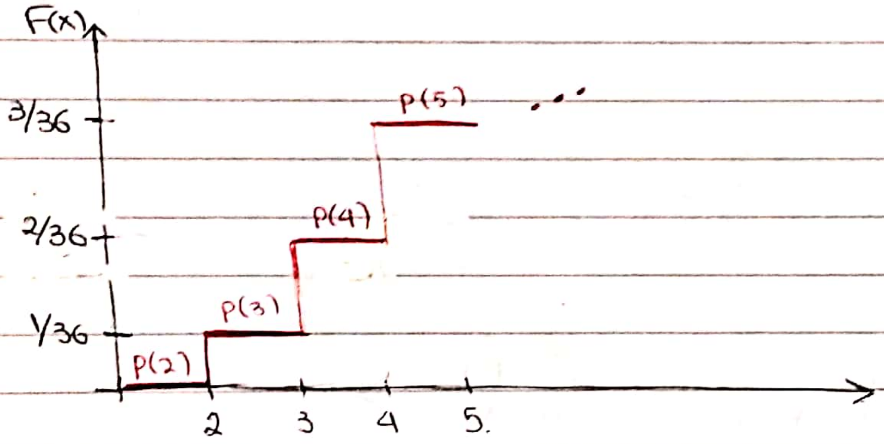
ΟΡΙΣΜΟΣ: Η αθροιστική κατανομή πιθανότητας (CDF) μίας τυχαίας μεταβλητής $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως $\boxed{F_X(x):=\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}\{\omega: X(\omega)\le x\}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(1) Αν η τ.μ. X παίρνει διακριτές τιμές x_i, $i=1,2,\dots$ ($x_i<x_j$, αν $i<j$) τότε, η F_X είναι βηματική συνάρτηση με άλμα $p(x_i)$ στο κάθε σημείο x_i, δηλαδή:

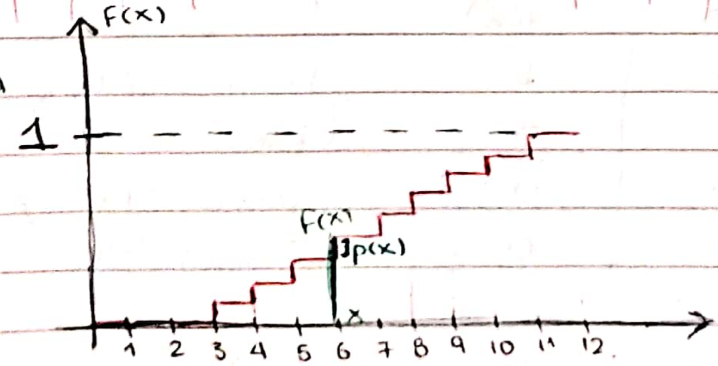
(α) η $F(x)$ είναι σταθερή στο $[x_{i-1}, x_i]$ *

(β) $F(x_i)-F(x_{i-1})=p(x_i)$.



x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
p(x)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	/36
F(x)	1	3	6	10	15	21	26	30	33	35	36	/36

*σχηματικά



(2) Η $F(x)$ είναι αύξουσα αν $x_1\le x_2$ τότε $\{\omega: X(\omega)\le x_1\}\subseteq\{\omega: X(\omega)\le x_2\}$

$\Rightarrow F(x_1)=\mathbb{P}(X\le x_1)\subseteq\mathbb{P}(X\le x_2)=F(x_2)$

(3) Αν $X_{max}=\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)<\infty$, τότε $F(x_{max})=1$

$F(x_{max})=\mathbb{P}\{\omega: X(\omega)\le x_{max}\}=\mathbb{P}(\Omega)=1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}F(x)=1$

συνάρτηση μάζας πιθανότητας

Παράδειγμα: (ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON).

Μια τυχαία μεταβλητή X έχει σ.μ.π. $p(k) = c\dfrac{\lambda^k}{k!}$, όπου $\lambda > 0$ δοσμένη σταθερά

προσδιοριστέα σταθερά

και $c > 0$ σταθερές, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

(α) $\mathbb{P}(X=0)$; , (β) $F(2) = ;$ (γ) να υπολογισθεί το $\lim_{n\to\infty} F(n)$.

όλες οι πιθανές τιμές της X

(α) $P(X=0) = p(0) = c$

Η προσδιοριστέα σταθερά c θα πρέπει να είναι τ.ω. $\sum_{k=0}^{\infty} c\dfrac{\lambda^k}{k!} = 1 \Rightarrow$ ($p(k)$)

$$\Rightarrow 1 = c \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{συνάρτηση ότι } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = c \cdot e^{\lambda} \Rightarrow c = e^{-\lambda}$$

Άρα, $\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}$

(β). $F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2)$

$= \mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}\, 1$

$+ \mathbb{P}(X=1) = e^{-\lambda}\, \lambda$

$+ \mathbb{P}(X=2) = e^{-\lambda}\, \dfrac{\lambda^2}{2}$

(γ) $F(n) = \mathbb{P}(X \leq n) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \dots + \mathbb{P}(X=n)$.

$$= e^{-\lambda} \cdot \left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!}\right]$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(n) = e^{-\lambda} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Παράδειγμα: (ΔΟΚΙΜΕΣ BERNOULLI ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)

Εκτελούμε n ανεξάρτητες ρίψεις ενός κίβδηλου νομίσματος που φέρνει "1" με πιθανότητα p ("1" αντιπροσωπεύει Κ ή Γ, όπως προτιμά ο αναγνώστης).

(α) Ποιος ο δ.χ. του πειράματος; , (β) ορίζω την τυχαία μεταβλητή X ως το συνολικό αριθμό των "1". Ποια η σ.μ.π της X;

(α) Τα δυνατά αποτελέσματα προσδιορίζονται ως εξής:

$\underset{1^η \text{ ρίψη}}{\{0,1\}} \,|\, \underset{2^η \text{ ρίψη}}{\{0,1\}} \,|\, \cdots \,|\, \underset{n \text{ ρίψη}}{\{0,1\}}$ Άρα, ο δ.χ. του πειράματος είναι $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \{0,1\}$

$\Rightarrow \Omega = \{0,1\}^n$ ($\rightsquigarrow |\Omega| = 2^n$).

(β) ο ακριβής ορισμός της X είναι $X(\omega) = X(\underset{\{0,1\}}{a_1}, \underset{\{0,1\}}{a_2}, \dots, \underset{\{0,1\}}{a_n}) = \sum_{k=1}^{n} a_k$.