4° μάθημα
23/02/23

Ανακεφαλαίωση:

~ Διωνυμικό θεώρημα (Πολυωνυμικό)
~ Ψεύδο-ορισμό πιθανότητας
~ Ισοπίθανα αποτελέσματα (δειγματικός χώρος
αποτέλεσμα / ενδεχόμενο
~ Πρόβλημα γενεθλίων

Γραφείς:
Έλλη Τέσσα
Κωνσταντίνος Τζιφάνης

Αυστηρός Ορισμός Πιθανότητας (σε διακριτά σύνολα)

Ορισμός (κατανομή πιθανότητας):

Έστω αριθμήσιμο σύνολο Ω (που θα καλείται δειγματικός χώρος). Ως κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του Ω θα καλείται οποιαδήποτε συνάρτηση $p: \Omega \to [0,1]$ τέτοια ώστε $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Ερώτημα: Είναι δυνατό να έχουμε $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) < \infty$ αν Ω υπεραριθμήσιμο και $p(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$;

Σημαντική βασική ιδέα:

Έστω $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = M < \infty$. Έστω $(\varepsilon > 0)$ $\Omega_\varepsilon := \{\omega \in \Omega : p(\omega) \geq \varepsilon\} \Rightarrow |\Omega_\varepsilon| \leq \frac{M}{\varepsilon}$

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = M$$

$$= \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega_\varepsilon} p(\omega)}_{\geq \varepsilon |\Omega_\varepsilon|} + \underbrace{\sum_{\omega \notin \Omega_\varepsilon} p(\omega)}_{\geq 0}$$

(Πρόαγγελος ανισότητας Markov!)

Δείξαμε ότι $|\Omega_\varepsilon| \le M/\varepsilon \ \ \forall \varepsilon>0 \overset{\text{για } \varepsilon=1/n}{\Longrightarrow} \forall n \ |\Omega_{1/n}| \le Mn$

Ωστόσο, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_{1/n} \Rightarrow \Omega$ αριθμήσιμο, άτοπο! ▨

*Σημείωση: Ο ορισμός μας δεν δουλεύει για συνεχή σύνολα! Έχει νόημα μόνο όταν το Ω είναι αριθμήσιμο. Αλλιώς, $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)=1 \Leftrightarrow p(\omega)>0$ μόνο σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του Ω.

Ορισμός (μέτρο πιθανότητας):

Έστω αριθμήσιμο σύνολο Ω (που θα καλείται δ.χ.).

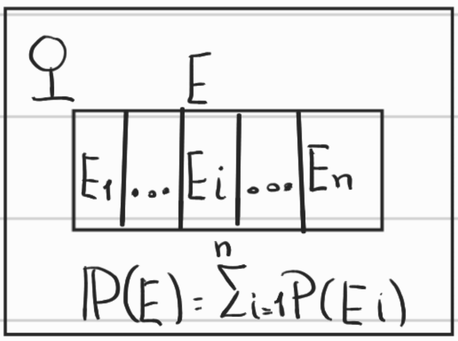
Ως μέτρο πιθανότητας στο Ω ορίζεται κάθε συνάρτηση

$\mathbb{P}: 2^{\Omega} \longmapsto [0,1]$, $E \subseteq \Omega \longmapsto \mathbb{P}(E) \in [0,1]$

τέτοια ώστε:

① $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ και

② $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$, όταν $E_i \subseteq \Omega$, $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i,j$



Σχέση μέτρου & κατανομής πιθανότητας

~ **Μέτρο πιθανότητας** → $\mathbb{P}(E)\ \forall E \subseteq \Omega$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega)$ ↓ ↑ $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega)$

~ **Κατανομή πιθανότητας** → $p(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$

Παράδειγμα: Μέτρο & κατανομή πιθανότητας σε ένα ζάρι

Στο ζάρι, ο δ.χ. είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Σε ένα αμερόληπτο ζάρι, αξιώνουμε ότι $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)$

Αυτό είναι μια κατανομή πιθανότητας όταν

$\sum_{i=1}^{6} p(i) = 1 \iff \boxed{p(i) = 1/6}\ \forall i = 1,2,\ldots,6$

Το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας από αυτήν την κατανομή είναι

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) = \sum_{\omega \in E} 1/6 = |E|/6}$$

Γενική αρχή: Ισοπίθανα αποτελέσματα

Έστω πεπερασμένος δ.χ. Ω. Θα λέμε ότι τα αποτελέσματα του Ω είναι ισοπίθανα όταν $p(\omega) = p(\omega')\ \forall \omega, \omega' \in \Omega$.

Σε αυτήν την περίπτωση, το αξίωμα $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ συνεπάγεται ότι $p(\omega) = 1/|\Omega|\ \forall \omega \in \Omega$.

Πορίσματα:

(1) Δεν μπορούμε να έχουμε ισοπίθανα αποτελέσματα σε άπειρο δ.χ.

(2) Το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας έχει:

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega\in E_i} p(\omega) = \sum_{\omega\in E_i} 1/|\Omega| = |E|/|\Omega|}$$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας από μία κατανομή πιθανότητας $p: \Omega \to [0,1]$ ικανοποιεί τα αξιώματα ορισμού μέτρου πιθανότητας.

Απόδειξη: Δεδομένης της p, έχουμε $\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega\in E} p(\omega)$ $\forall E \subseteq \Omega$

Θδο:

(1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Πράγματι, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ ✓

(2) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ οποτεδήποτε $E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i,j \in \mathbb{N}$

Εξ' ορισμού $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{\omega\in E_i} p(\omega) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega\in E_i} p(\omega) =$

$= \sum_{\substack{\omega\in E_i \\ (*)}} p(\omega) = \sum_{\omega\in \bigcup_i E_i} p(\omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$ ∎

για κάποιο $i\in\mathbb{N}$

↓

(*) $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega : \omega\in E_i \text{ για κάποιο } n\in\mathbb{N}\}$

\# $E_i \cap E_j = \emptyset$, οπότε κάθε ω ανήκει μόνο σε ένα E_i.

Βασικές ιδιότητες μέτρων πιθανοτήτων

(1) $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E) \quad \forall E \subseteq \Omega$

συμπλήρωμα του E: $E^c = \Omega \setminus E$

(2) $E \subseteq F \Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F) \quad \forall E, F \subseteq \Omega$

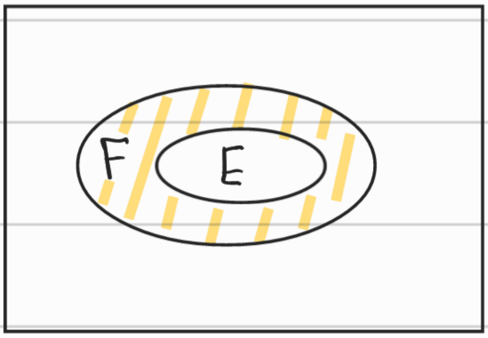
(3) $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

Οπτική αναπαράσταση μέσω διαγραμμάτων Venn

(1)

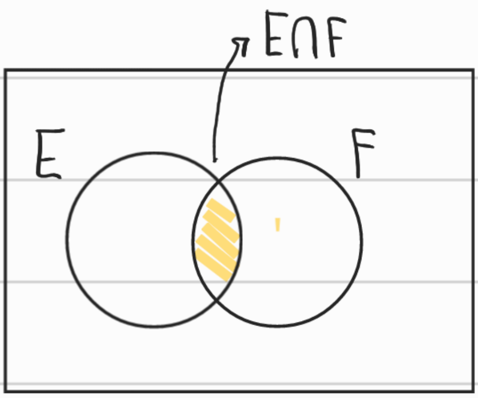
$\Rightarrow \mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E)$

(2)



$\Rightarrow \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

(3)



$\Rightarrow \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Πρόβλημα (Ιανουάριος 2018):

Έχουμε 9 κάρτες 2 όψεων

2 → {Κόκκινες, Κόκκινες}

3 → {Πράσινες, Πράσινες}

4 → {Πράσινες, Κόκκινες}

Τραβάμε μια κάρτα στην τύχη & γυρνάμε μία της όψη, επίσης τυχαία (ισοπίθανα).

① Ποιά η πιθανότητα να τραβήξουμε μια κόκκινη κάρτα;

② Ποιά η πιθανότητα να αποκαλυφθεί μια κόκκινη όψη;

Απάντηση:

① $\mathbb{P}(\text{κόκκινης κάρτας}) = \dfrac{\#\{\text{κόκκ, κόκκ}\}}{\#\ \text{καρτών}} = \dfrac{2}{9}$

② $\mathbb{P}(\text{κόκκινης όψεως}) = \mathbb{P}(\text{κόκκ, κόκκ}) + \mathbb{P}(\text{κόκκ, πράσ} \cap \text{κόκκ όψη}) =$

$= \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{18}$