ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΕΝΕΘΛΙΩΝ

Δεδομένης μιας τάξης με n άτομα:

1. Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 2 εξ αυτών να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;

2. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του n. τ.ω. η πιθανότητα του ερωτήματος 1 να είναι μεγαλύτερη του $1/2$?

↳ $\boxed{\Sigma.\tau.M.}$: Θεωρούμε ότι κάθε έτος έχει 365 μέρες και κάθε μέρα του έτους είναι ισοπίθανη.

Σκέψεις → Ευνοϊκά αποτελέσματα = ? Δύσκολο *

→ Συνολικά αποτελέσματα = |365|365| .... |365| = $\boxed{365^n}$

↳ (01/2, 02/2, ...)

(02,2, ~~01/2~~ ...)

* Ωστόσο, το ενδεχόμενο να μην υπάρχει κανένα ζεύγος ατόμων με γενέθλια την ίδια μέρα είναι πιο εύκολο να καταμετρηθεί. Συγκεκριμένα:

Μη ευνοϊκά αποτελέσματα = {κανένα ζεύγος} =

$$= |365|364|363| \dots |365-n+1| = 365 \times 364 \times \dots \times (365-n+1) = \boxed{\frac{365!}{(365-n)!}}$$

· Άρα η πιθανότητα να μην υπάρχει κοινή ημερομηνία:

$$\mathbb{P}(\text{δεν υπάρχει κοινή}) = \frac{365!}{(365-n)!} \Big/ 365^n = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365-n+1)}{365 \times \dots \times 365 \times \dots} = \binom{365}{n} n! \Big/ 365^n$$

· Άρα

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{τουλάχιστον } 2) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \Big/ 365^n}$$

↳ θέλουμε έναν τρόπο να προσεγγίζουμε αυτά τα αποτελέσματα, διότι οι πράξεις είναι δύσκολες και χρονοβόρες.

② Ερώτημα: Για το ερώτημα αυτό θα χρειαστούμε έναν τρόπο ικανοποιητικής προσέγγισης που περιέχουν το n!. 28.2.2023

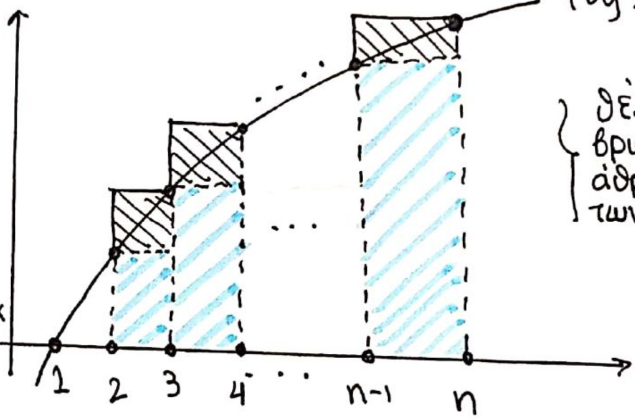
Αυτό μας οδηγεί στον τύπο του Stirling.

Σκοπός: Να βρεθεί μια προσεγγιστική έκφραση για το n!.
Για να έχουμε καλύτερο έλεγχο της προσέγγισης θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τον λογάριθμο του n! ($\log n!$)

↳ θα μου μετατρέψει το γινόμενο σε άθροισμα!

Πράγματι $$\log n! = \log \prod_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \log k$$

Θα δοκιμάσουμε να προσεγγίσουμε το άθροισμα με ένα ολοκλήρωμα:



θέλω να βρω το άθροισμα των υψών.

κάτω προσέγγιση

$$\log 1\cdot 1 + \log 2\cdot 1 + \dots + \log(n-1)\cdot 1 < \int_1^n \log x\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^n \log x\,dx < \log 1\cdot 1 + \log 2\cdot 1 + \log n\cdot 1$$

πάνω προσέγγιση

Συμπεραίνουμε ότι: $$\int_1^n \log x\,dx < \sum_{k=1}^{n} \log k < \int_1^{n+1} \log x\,dx$$

$$\boxed{n\log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1)\log(n+1) - n}$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο, έχουμε:

$$\frac{(n+1)\log(n+1) - n}{n\log n - n + 1} \longrightarrow 1$$

$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1$ καθώς $n \to +\infty$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι $\log n! \sim n\log n - n$

$\rightsquigarrow n+1 \sim n \not\Rightarrow e^{n+1} \sim e^{n}$

↳ δηλ: $e\cdot e^n \sim e^n$

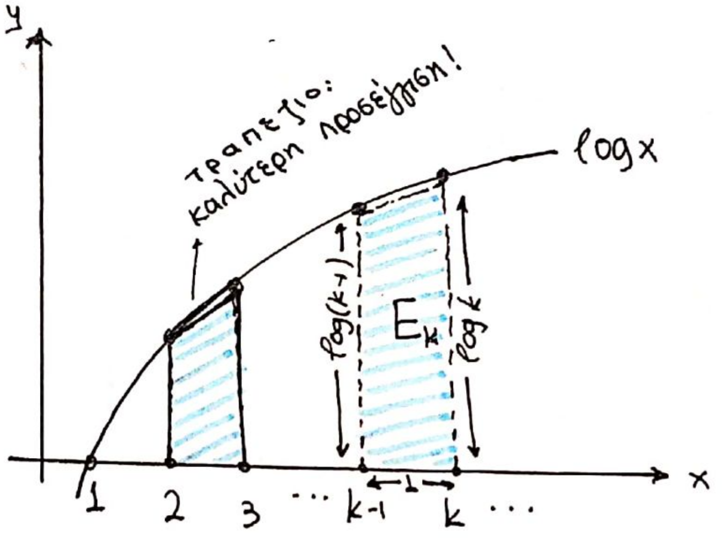
χάνω τον παράγοντα!

Άρα το ότι $\log n! \sim n\log n - n$, δεν σημαίνει ότι

$$n! \sim e^{n\log n - n} = e^{n\log n}/e^{n} = n^{n}/e^{n} = \underline{\underline{(n/e)^{n}}}$$

↳ θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την προσέγγιση

$$n! \text{ "}\sim\text{" } (n/e)^{n} \ :$$



θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν της καμπύλης $\log x$ με τραπέζια βάσεων $\log(k-1)$ κ' $\log k$ που έχουν εμβαδόν $E_k = \dfrac{\log(k-1)+\log k}{2}$.

$$\Rightarrow \int_1^n \log x\,dx \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k-1)+\log k}{2} = \frac{\log 1+\log 2}{2} + \frac{\log 2+\log 3}{2} + \dots + \frac{\log(n-1)+\log n}{2}$$

$$= \log 2 + \log 3 + \dots + \log(n-1) + \log n - \frac{\log n}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^n \log x\,dx + \frac{\log n}{2} \sim \sum_{k=1}^{n} \log k = \log(n!)$$

Οπότε συνολικά: $\boxed{\log n! \sim n\log n - n + 1 + \dfrac{\log n}{2}}$

Η προηγούμενη προσέγγιση: $\log n! \sim n\log n - n$

→ έχουμε τώρα έξτρα το $+1 + \dfrac{\log n}{2}$

Άρα προκύπτει η προσέγγιση:

$$n! \text{ "}\sim\text{" } \underbrace{e^{n\log n - n}\cdot e^{1}\cdot e^{\log n/2}}_{(n/e)^{n}\cdot e\cdot\sqrt{n}}$$

28.2.2023

Η προσέγγιση $n! \approx e\sqrt{n}\,(n/e)^n$ είναι σωστή μέχρις μιας πολ/κής σταθεράς. [Αυτό επειδή η προσέγγιση $\log n! \sim n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + 1$ είναι σωστή μέχρις επιπέδου $O(1)$.]

Stirling: Έστω ότι $n! \sim e^{a}\sqrt{n}\,(n/e)^n$ όπου το a πρέπει να υπολογισθεί.

↳ Η σκέψη του ήταν, αν μπορέσουμε να βρούμε μια 2^{η} ασυμπτωτική έκφραση για το $n!$ ίσως μπορέσουμε να βγάλουμε μια εξίσωση για το a.

• Γινόμενο του Wallis: $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\cdots = \frac{\pi}{2}$

Έστω $W_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} =$

$$= \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\times1\times3\times5\times\ldots\times(2n+1)}$$

$$1\times3\times\ldots\times(2n-1) = \frac{1\cdot2\times3\times4\times\ldots\times(2n-1)\times2n}{\underbrace{2\times4\times\ldots\times2n}_{2^n\cdot n!}}$$

Πολλαπ/με και διαιρούμε με $2^n\cdot n!$ 2 φορές: $$W_n = \frac{2^{2n}(n!)^2\,(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!\,(2n)!\,(2n+1)} = \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{((2n)!)^2\cdot(2n+1)}$$

Ανακαθιστώντας: $n! \sim e^{a}\sqrt{n}\cdot(n/e)^n$:

$$W_n \sim \frac{1}{2n+1}\,\frac{2^{4n}\left[e^{a}\sqrt{n}\,(n/e)^n\right]^4}{\left[e^{a}\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}\right]^2} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{2^{4n}\cdot e^{4a}\,n^2\cdot n^{4n}/e^{4n}}{e^{2a}\cdot2n\cdot2^{4n}\cdot n^{4n}/e^{4n}} = \frac{e^{2a}\cdot n}{(2n+1)2} \to \frac{e^{2a}}{4}$$

Άρα $\frac{e^{2a}}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{2a} = 2\pi \Rightarrow e^{a} = \sqrt{2\pi}$

Άρα ανακαθιστώντας: $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}$ } Stirling

28.2.2023

Άρα, γυρνάμε στο πρόβλημα των γενεθλίων έχοντας δείξει ότι $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}$.

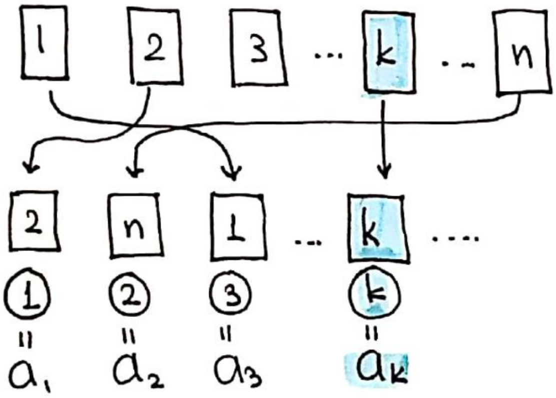
$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}$(καμία κοινή ημερομηνία) $= \dfrac{365!}{(365-n)!} \Big/ 365^n \xRightarrow{\text{Τύπος Stirling}}$

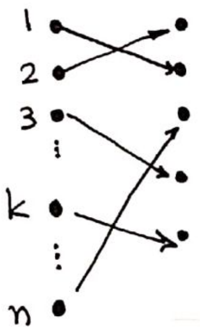
$$\mathbb{P}(\text{κ.κ.η.}) = \dfrac{\sqrt{365}\left(\frac{365}{e}\right)^{365}}{\sqrt{365-n}\left(\frac{365-n}{e}\right)^{365-n}} \Big/ 365^n \implies$$

Ελάχιστο n για το οποίο $\boxed{\mathbb{P}(\text{κ.κ.η.}) < \frac{1}{2} \text{ είναι } \underline{\underline{n=23}}}$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΒΛΗΜΑ}}$ (Αποδιατάξεων ή διαταραχών (Derangements)).

Έχουμε n αριθμημένες κάρτες $\{1,\dots,n\}$ τις οποίες τοποθετούμε σε μια τυχαία διάταξη. Αν a_n ο αριθμός της ν-οστής κάρτας, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου: $E=\{\exists n : a_n = n\}$ → αυτό που κάναμε με τις κάρτες στην προηγ. διάλεξη.





→ Κάθε πιθανό ενδεχόμενο αντιστοιχεί σε μια απεικόνιση $k \longmapsto a_k \in \{1,\dots,n\}$. Αναζητούμε την πιθ. η απεικόνιση $k \longmapsto a_k$ να έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

__Συμβολισμός__: Έστω $\overset{=n!}{D_n}$ ο αριθμός των απεικονίσεων χωρίς κανένα σταθ. σημείο.

Δύο τρόποι: → Επαγωγικά
↳ μέτρηση "τουλάχιστον" k σταθερών στοιχείων.

① __Επαγωγικό__: Στα n στοιχεία πόσες απεικονίσεις δεν έχουν σ.σ.?

$$D_n = \underline{(n-1)} \cdot D_{n-1} \begin{cases} \xrightarrow{2x \to 1^{\eta}\ \text{θέση}} D_{n-2} \\ \longrightarrow D_{n-1} \end{cases} \implies D_n = (n-1)\left[D_{n-1} + D_{n-2}\right]$$