Διάλεξη ② 14.2.2023

ΓΡΑΦΕΑΣ: Κωνσταντίνα Νησίδη

Βασικές Αρχές Συνδιαστικής

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Όταν έχουμε 2 πειράματα με δυνατό αριθμό ενδεχομένων m, n αντιστοίχως, τότε ο συνολικός αριθμός ενδεχομένων είναι $m \times n$.

Συνολοθεωρητικά: $A \to m$ $\quad B \to n$ $\quad \longrightarrow \quad A \times B \to m \times n$

σύνολο ενδεχομένων 1ου πειράματος (A)

σύνολο ενδεχομένων 2ου πειράματος (B)

Γενικευμένη Αρχή Απαρίθμησης:

Όταν έχουμε r πειράματα με δυνατό αριθμό ενδεχομένων $m_i, i=1,2,\dots,r$, αντιστοίχως, τότε ο συνολικός αριθμός ενδεχομένων είναι:

$$\prod_{i=1}^{r} m_i = m_1 \times \dots \times m_r$$

Συνολοθεωρητικά: $A_i \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} A_i = A_1 \times \dots \times A_r$

σύνολο ενδεχομένων i-στού πειράματος

Παράδειγμα: Πόσους αριθμούς κυκλοφορίας μπορούμε να ~~φτιάξουμε~~ φτιάχουμε με 24 γράμματα κ' τα ψηφία 0-9 της μορφής

Γρ	Γρ	Γρ	Αρ	Αρ	Αρ	Αρ
24	24	24	10	10	10	10

$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ τρόποι να τα συμπληρώσω

$24^3 \cdot 10^4$

Αν είχαμε τον περιορισμό ότι οι αριθμοί δεν ξεκινάνε με το 0:

Γρ	Γρ	Γρ	Αρ	Αρ	Αρ	Αρ
24	24	24	9	10	10	10

$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Παράδειγμα: Έστω ένα σύνολο A με n στοιχεία. Πόσες απεικονίσεις $f: A \to A$ υπάρχουν?

Μια απεικόνιση $f: A \to A$ απλώς αντιστοιχίζει στοιχεία σε στοιχεία

1ο	2ο	...	nο
n	n		n

$\underbrace{n \quad n \quad \dots \quad n}_{n^n}$ → στοιχεία που μπορεί να απεικονιστεί το καθένα

Γενίκευση: Πόσες απεικονίσεις από σύνολο $A(|A|=m)$ ~~στο~~ σε σύνολο $B(|B|=m)$?

m	m	...	m
1	2		n

$= m^n$

14.2.23

Παράδειγμα: Έστω ένα σύνολο A με n στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει το A;

$$\underbrace{\boxed{2}\boxed{2}\ \cdots\ \boxed{2}}_{n\text{-στοιχεία}} = 2^n \text{ υποσύνολα}$$

Εναλλακτικά: ένα υποσύνολο ταυτίζεται με μια απεικόνιση

$$f: A \to \{0,1\}$$

είναι στο υποσύνολο

δεν είναι στο υποσύνολο.

Σημείωση: Το δυναμοσύνολο γράφεται και: $P_A = 2^A = \{0,1\}^A$

Παράδειγμα: Πόσες 1-1 απεικονίσεις μπορούμε να φτιάξουμε από ένα σύνολο στον εαυτό του (με n στοιχεία).

$$\underset{1}{\boxed{n}}\ \underset{2}{\boxed{n-1}}\ \underset{3}{\boxed{n-2}}\ \cdots\ \underset{n-1}{\boxed{2}}\ \underset{n}{\boxed{1}} \rightsquigarrow \text{Συνολικά: } n! \text{ επιλογές.}$$

n στοιχεία του A

Μεταθέσεις: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διαταχθούν n αντικείμενα;

$$\boxed{n}\boxed{n-1}\boxed{n-2}\ \cdots\ \boxed{2}\boxed{1}$$

Έχουμε n! δυνατές μεταθέσεις.

↓

P_n = Permintatation of n ~~dea~~ elements.

Παράδειγμα: Έχουμε 3 βιβλία Μαθηματικών, 5 φυσικής και 4 χημείας. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τα βάλουμε σε σειρά.

$$\boxed{12}\boxed{11}\boxed{10}\boxed{9}\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 12!$$

Τα βιβλία είναι μη διακριτά (όμοια), αν δεν ήταν έτσι, και ήταν διακριτά θα είχαμε 3!.

$$\underbrace{\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}}_{\text{Μαθ}} = 3! \cdot \underbrace{\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}}_{\text{φυσικής}} = 5! \cdot \boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 4!$$

Συνολικά: $\dfrac{12!}{3!5!4!}$

Γενικότερα: 14.2.23

$\boxed{\text{Μεταθέσεις με Επανάληψη}}$: Ο συνολικός αριθμός μεταθέσεων n αντικειμένων τα οποία είναι διαμερισμένα σε r ομάδες στοιχείων πλήθους n_i, $i=1,2,\dots,r$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$

δίνεται από τον τύπο: $\boxed{\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}}$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ (λόττο) : Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε μια (a) διατεταγμένη
(β) μη διατεταγμένη 6άδα από τα ψηφία 1 – 49 ?

! Στην πρώτη περίπτωση με νοιάζει η σειρά, στη δεύτερη σαν σύνολο!

ΛΥΣΗ

(a) |49|48|47|46|45|44|

$$49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44 = \frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot\dots\cdot1}{43\cdot42\cdot\dots\cdot1}$$

(β) Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τον αριθμό μεταθέσεων 49 αντικειμένων, 6 εκ των οποίων είναι χρώματος κόκκινου (επιλ.) 43 χρώματος μαύρου (⇒ δεν επιλέγονται) ⇒ $n=49$, $n_1=43$, $n_2=6$ ⇒ $\dfrac{49!}{43!6!}$

Άλλος τρόπος σκέψης:

$$\frac{|49|48|47|46|45|44|}{|6|5|4|3|2|1|} = \frac{49\cdots44}{6!} = \frac{49!}{6!43!}$$

πόσες φορές έχω διπλομετρήσει την ίδια 6άδα; όσες φορές μπορώ να διατάξω τα 6 στοιχεία.

$\boxed{\text{ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΙ}}$: Ο αριθμός μη διατεταγμένων υποσυνόλων k στοιχείων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι:

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Συνδιασμός n αντικειμένων ανά k.

↳ Διωνυμικός Συντελεστής.

ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL

14.2.2023

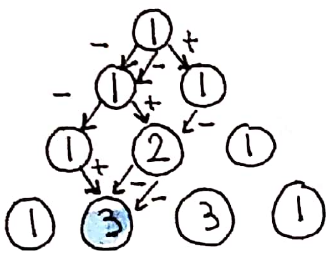
	Γραμμή:
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5

γραμμή (5,3)

Ανακεφαλαίωση:

- Έστω Pas(n,k) ο αριθμός που βρίσκεται στην (n,k) θέση του τριγώνου του Pascal.
  - Με σύμβαση Pas(r,m) = 0 για m > r.
- Εξ' ορισμού Pas(n,k) = Pas(n−1, k−1) + Pas(n−1, k)
- "Δείξαμε" επαγωγικά ότι Pas(n,k) = # διαδρομών που ενώνουν την ρίζα (0,0) με το στοιχείο (n,k) του τριγώνου
  - κατεβαίνουμε μια γραμμή και στρίβουμε δεξιά (+) ή αριστερά (−).

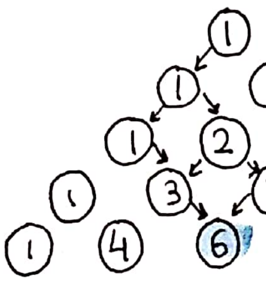
• Για το (3,1) έχουμε τις διαδρομές:



−	−	+
−	+	−
+	−	−

παρατήρηση: Χρειάζομαι πάντα 2 αριστερές στροφές και μια δεξιά.

• Ας παρατηρήσουμε για μεγαλύτερο παράδειγμα:
Για το (4,2) έχουμε τις διαδρομές:



αυτές και τις συμμετρικές

−	−	+	+
−	+	−	+
−	+	+	−
+	+	−	−
+	−	+	−
+	−	−	+

n στοιχεία k εκ των οποίων είναι θετικά και n−k τα αρνητικά.

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ τρόποι $= \binom{n}{k}$

Δείξαμε ότι $\boxed{Pas(n,k) = \binom{n}{k}}$

Πόρισμα: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$

· $2^{η}$ Απόδειξη (Αλγεβρικά):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

υπάρχει εδώ υπάρχει εδώ

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k)\,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad \blacksquare$$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ: Διώνυμο: $(x+y)^n$

Ερώτημα: Ποιό είναι το ανάπτυγμα του διωνύμου για διαφορετικά n;

- $n=0: (x+y)^0 = 1$
- $n=1: (x+y)^1 = 1x + 1y$
- $n=2: (x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$
- $n=3: (x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

οι συντελεστές φτιάχνουν το τρίγωνο του Pascal!

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) \longrightarrow$

x x x

$\boxed{x\ x\ y}$ $\longrightarrow$ συντελεστής φαίνεται να είναι $\binom{n}{k} = \binom{3}{2}$

x y y

y y y

Άρα $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$