ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι – ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 21.06.2023

ΤΜΗΜΑ Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Οδηγίες: Η μέγιστη βαθμολογία είναι **120**. **Χρησιμοποιήστε πρόχειρο** και γράψτε τις λύσεις με τη σειρά.

Θέμα 1 [10 μονάδες]. Υποθέστε ότι τα ενδεχόμενα A, B, C, D είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ότι $\mathbb{P}(CD) > 0$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(A \mid CD) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid CD) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(AB \mid CD) = \mathbb{P}(AB)$, και $\mathbb{P}(A \cup B \mid CD) = \mathbb{P}(A \cup B)$.

Θέμα 2 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε ένα – πιθανώς κίβδηλο – νόμισμα δύο φορές. Έστω A το ενδεχόμενο να φέρουμε *δύο κορώνες*, B το ενδεχόμενο να φέρουμε *τουλάχιστον μία κορώνα*, και C το ενδεχόμενο η *πρώτη ρίψη να είναι κορώνα*.

(1) Να δείξετε ότι $\mathbb{P}(A \mid C) \geq \mathbb{P}(A \mid B)$.

(2) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $\mathbb{P}(A \mid C)$ και $\mathbb{P}(A \mid B)$ αν το νόμισμα είναι δίκαιο.

Θέμα 3 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια και σημειώνουμε το άθροισμα τους. Τί είναι πιο πιθανό: να φέρουμε άθροισμα ίσο με 11 ή ίσο με 12?

Θέμα 4 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε δύο νομίσματα συγχρόνως μέχρι το ένα από αυτά να έρθει κορώνα και το άλλο γράμματα. Το πρώτο νόμισμα έρχεται κορώνα με πιθανότητα p, το δεύτερο με πιθανότητα q. Όλες οι ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες. Να βρεθεί (1) η σ.μ.π., η μέση τιμή, και η διασπορά του αριθμού των ρίψεων, καθώς και (2) η πιθανότητα ότι η τελευταία ρίψη του πρώτου νομίσματος είναι κορώνα. Δίνεται ότι η γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ έχει μέσο $1/\rho$ και διασπορά $(1-\rho)/\rho^2$.

Θέμα 5 [10 μονάδες]. Έστω ότι η X έχει σ.π.π. $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, για κάποια σταθερά $c > 0$. Να προσδιορίσετε τη σταθερά c και να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

Θέμα 6 [20 μονάδες]. Ένα σημείο επιλέγεται τυχαία (με ομοιόμορφη σ.π.π.) στο ημικύκλιο $D = \{(x, y) : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$. Να υπολογίσετε (1) την από κοινού σ.π.π. των συντεταγμένων X και Y, (2) τις περιθώριες σ.π.π. των X και Y, και, τέλος, (3) τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[Y]$.

Θέμα 7 [10 μονάδες]. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$, και $\mathbb{P}(X = 3) = 1/4$. Να υπολογισετε (1) τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της X, και (2) τις ροπές $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ και $\mathbb{E}[X^3]$.

Θέμα 8 [25 μονάδες]. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$ με πεπερασμένη μέση τιμή μ, και έστω $Y_i = X_i X_{i+1}$ για $i \in \mathbb{N}$.

(1) Υπολογίστε την $\mathbb{E}[Y_i]$.

(2) Είναι η Y_i και η Y_{i+1} ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες? [Ναι/Όχι]

(3) Είναι η Y_i και η Y_{i+2} ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες? [Ναι/Όχι]

(4) Έστω $R_n = Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}$. Βρείτε το όριο της R_n/n καθώς $n \to \infty$.

(5) Έστω $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Βρείτε το όριο της S_n/n καθώς $n \to \infty$.

Καλή επιτυχία!!

Θέμα 1 [10 μονάδες]. Υποθέστε ότι τα ενδεχόμενα A, B, C, D είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ότι $\mathbb{P}(CD) > 0$. Δείξτε ότι $\mathbb{P}(A \mid CD) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid CD) = \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(AB \mid CD) = \mathbb{P}(AB)$, και $\mathbb{P}(A \cup B \mid CD) = \mathbb{P}(A \cup B)$.

Λύση: Αφού $C \perp\!\!\!\perp D$ έχουμε $\mathbb{P}(CD) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(D) > 0$ δηλ. $\mathbb{P}(C) > 0$, $\mathbb{P}(D) > 0$. Συνεπώς:

- $\mathbb{P}(A \mid CD) = \dfrac{\mathbb{P}(ACD)}{\mathbb{P}(CD)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\,\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}}{\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}} = \mathbb{P}(A)$ αφού $(A, C, D)_{\perp\!\!\!\perp}$
- $\mathbb{P}(B \mid CD) = \dfrac{\mathbb{P}(BCD)}{\mathbb{P}(CD)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)\,\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}}{\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}} = \mathbb{P}(B)$ αφού $(B, C, D)_{\perp\!\!\!\perp}$
- $\mathbb{P}(AB \mid CD) = \dfrac{\mathbb{P}(ABCD)}{\mathbb{P}(CD)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}}{\cancel{\mathbb{P}(C)}\,\cancel{\mathbb{P}(D)}} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB)$ αφού $(A, B, C, D)_{\perp\!\!\!\perp}$
- $\mathbb{P}(A \cup B \mid CD) = \mathbb{P}(A \mid CD) + \mathbb{P}(B \mid CD) - \mathbb{P}(AB \mid CD)$
  $= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A \cup B)$

Θέμα 2 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε ένα – πιθανώς κίβδηλο – νόμισμα δύο φορές. Έστω A το ενδεχόμενο να φέρουμε *δύο κορώνες*, B το ενδεχόμενο να φέρουμε *τουλάχιστον μία κορώνα*, και C το ενδεχόμενο η *πρώτη ρίψη να είναι κορώνα*.

(1) Να δείξετε ότι $\mathbb{P}(A \mid C) \geq \mathbb{P}(A \mid B)$.

(2) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $\mathbb{P}(A \mid C)$ και $\mathbb{P}(A \mid B)$ αν το νόμισμα είναι δίκαιο.

Λύση: Έστω $\{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$ τα πιθανά αποτελέσματα των δύο ρίψεων ("K" = κορώνα, "Γ" = γράμματα). Τότε, έχουμε:

- $A = \{KK\}$
- $B = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$
- $C = \{KK, K\Gamma\}$

α) Συνεπώς: $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(KK)}{\mathbb{P}(KK) + \mathbb{P}(K\Gamma) + \mathbb{P}(\Gamma K)}$

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(AC)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(KK)}{\mathbb{P}(KK) + \mathbb{P}(K\Gamma)}$$

Διαιρώντας, προκύπτει το ζητούμενο.

β) Αν το νόμισμα είναι δίκαιο, έχουμε $\mathbb{P}(KK) = \mathbb{P}(K\Gamma) = \mathbb{P}(\Gamma K) = \mathbb{P}(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, οπότε $\begin{cases} \mathbb{P}(A \mid C) = 1/2 \\ \mathbb{P}(A \mid B) = 1/3 \end{cases}$

Θέμα 3 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε τρία αμερόληπτα ζάρια και σημειώνουμε το άθροισμα τους. Τί είναι πιο πιθανό: να φέρουμε άθροισμα ίσο με 11 ή ίσο με 12?

Λύση: [Δεν είναι η πιο γρήγορη, αλλά είναι "συστηματική"]

Έστω Z_1, Z_2, Z_3 τα αποτελέσματα των τριών ζαριών. Θα δεσμεύσουμε στο αποτέλεσμα του πρώτου (Z_1).

• Για το 11 έχουμε: $11 = \underbrace{1}_{Z_1} + \underbrace{10}_{Z_2+Z_3} = \underbrace{2}_{Z_1} + \underbrace{9}_{Z_2+Z_3} = \underbrace{3}_{Z_1} + \underbrace{8}_{Z_2+Z_3} = \underbrace{4}_{Z_1} + \underbrace{7}_{Z_2+Z_3} = \underbrace{5}_{Z_1} + \underbrace{6}_{Z_2+Z_3} = \underbrace{6}_{Z_1} + \underbrace{5}_{Z_2+Z_3}$

Άρα, αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους με τους οποίους δύο ζάρια (Z_2+Z_3) δίνουν αποτέλεσμα $\{10, 9, 8, 7, 6, 5\}$

Αυτό το έχουμε κάνει αρκετές φορές στην τάξη (βλ. σκιασμένο τμήμα στο σχήμα).

$Z_3 \backslash Z_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Άρα, συνολικά έχουμε $\overset{10}{3} + \overset{9}{4} + \overset{8}{5} + \overset{7}{6} + \overset{6}{5} + \overset{5}{4} = \boxed{27 \text{ τρόποι}}$

• Για το 12, έχουμε: $12 = 1 + 11 = 2 + 10 = 3 + 9 = 4 + 8 = 5 + 7 = 6 + 6$

Άρα: $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 = 25$ τρόποι

Συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{P}(11) > \mathbb{P}(12)$.

Θέμα 4 [15 μονάδες]. Ρίχνουμε δύο νομίσματα συγχρόνως μέχρι το ένα από αυτά να έρθει κορώνα και το άλλο γράμματα. Το πρώτο νόμισμα έρχεται κορώνα με πιθανότητα p, το δεύτερο με πιθανότητα q. Όλες οι ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες. Να βρεθεί (1) η σ.μ.π., η μέση τιμή, και η διασπορά του αριθμού των ρίψεων, καθώς και (2) η πιθανότητα ότι η τελευταία ρίψη του πρώτου νομίσματος είναι κορώνα. Δίνεται ότι η γεωμετρική κατανομή με παράμετρο ρ έχει μέσο $1/\rho$ και διασπορά $(1-\rho)/\rho^2$.

Λύση: Η πιθανότητα να έχουμε κορώνα + γράμματα είναι $\pi = \underset{K}{p}\,(1-\underset{\Gamma}{q}) + (1-\underset{\Gamma}{p})\,\underset{K}{q}$

(1) Η διαδικασία είναι μια ακολουθία από δοκιμές Bernoulli με πιθ/τα επιτυχίας π. Άρα ο αριθμός ρίψεων X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\pi = p(1-q) + (1-p)q$. Συνεπώς:

$\mathbb{P}(X=k) = (1-\pi)^{k-1}\pi$, $\mathbb{E}[X] = 1/\pi$, $Var(X) = \frac{1-\pi}{\pi^2}$ με $\pi = p(1-q) + (1-p)q$

(2) Αφού η τελευταία ρίψη έχει ένα νόμισμα κορώνα κ' ένα γράμματα, η δεσμευμένη πιθ/τα είναι:

$$\mathbb{P}(N1 = \text{κορώνα} \mid \text{κορώνα + γράμματα}) = \frac{\mathbb{P}(\{N1 = K\} \cap \{\text{ένα } K, \text{ ένα } \Gamma\})}{\mathbb{P}(\text{ένα } K, \text{ ένα } \Gamma)} = \frac{\mathbb{P}(N_1 = K, N_2 = \Gamma)}{\pi} = \frac{p\,(1-q)}{p(1-q) + q(1-p)}$$

Θέμα 5 [10 μονάδες]. Έστω ότι η X έχει σ.π.π. $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, για κάποια σταθερά $c > 0$. Να προσδιορίσετε τη σταθερά c και να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

Λύση: Αρχικά, θα πρέπει να έχουμε $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

Τώρα $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-\lambda|x|}\,dx = c\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}\,dx + c\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx$

$$= c\,\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} + c\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= c\,\frac{1}{\lambda}(1-0) + c\left(-\frac{1}{\lambda}\right)(0-1) = 2c$$

Άρα, έχουμε $2c = 1 \Rightarrow c = 1/2$

Μέση τιμή: Αφού f άρτια, έπεται ότι $\mathbb{E}[X] = 0$.

Διασπορά: Αφού $\mathbb{E}[X] = 0$, έπεται ότι $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \cancel{\mathbb{E}[X]^2}^{\,0} = \mathbb{E}[X^2]$

Τώρα, έχουμε: $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda|x|}\,dx$

Αφού η συνάρτηση $x^2 e^{-\lambda|x|}$ είναι άρτια, θα έχουμε $\mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \cancel{2c}^{\,1}\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx$

Τώρα, έχουμε $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} x^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)'dx = \cancel{x^2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}^{\,0} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x}\,dx$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)'dx$$

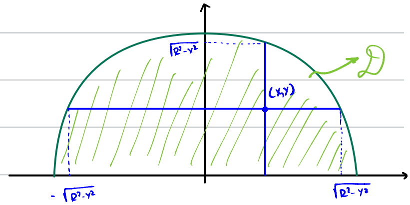
$$= \cancel{\frac{2}{\lambda}x\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}^{\,0} - \frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 2/\lambda^3$$

Δηλαδή: $\mathrm{Var}(X) = 2/\lambda^3$

Θέμα 6 [20 μονάδες]. Ένα σημείο επιλέγεται τυχαία (με ομοιόμορφη σ.π.π.) στο ημικύκλιο $D = \{(x, y) : y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$. Να υπολογίσετε (1) την από κοινού σ.π.π. των συντεταγμένων X και Y, (2) τις περιθώριες σ.π.π. των X και Y, και, τέλος, (3) τις μέσες τιμές $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[Y]$.

Λύση: Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(1) Για την από κοινού κατανομή, θα έχουμε:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c & \text{αν } (x,y) \in D \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad [\text{αφού } (X,Y) \text{ ομοιόμορφη}]$$

Αφού $\iint_D f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$ συμπεραίνουμε ότι $c \iint_D dx\,dy = 1$

$\Rightarrow c \cdot \pi R^2/2 = 1 \Rightarrow c = 2/\pi R^2$

(2) Περιθώρια της X: $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{2}{\pi R^2}\,dy = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}$ για $x \in [-R, R]$ (0 αλλιώς)

Περιθώρια της Y: $f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{2}{\pi R^2}\,dx = \frac{4}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}$ για $y \in [0, R]$ (0 αλλιώς)

(3) Αφού $f_X(x)$ άρτια, θα έχουμε $\mathbb{E}[X] = 0$

Τέλος $\mathbb{E}[Y] = \int y f_Y(y)\,dy = \int_0^R y \frac{4}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\,dy = -\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R (R^2-y^2)'\sqrt{R^2-y^2}\,dy = -\frac{2}{\pi R^2}\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{3/2}\Big|_0^R$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \frac{4R}{3\pi}$

Θέμα 7 [10 μονάδες]. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$, και $\mathbb{P}(X = 3) = 1/4$. Να υπολογισετε (1) τη ροπογεννήτρια συνάρτηση της X, και (2) τις ροπές $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ και $\mathbb{E}[X^3]$.

Λύση: $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \frac{1}{2}e^{t\cdot 1} + \frac{1}{4}e^{t\cdot 2} + \frac{1}{4}e^{t\cdot 3} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$

Άρα: $M_X'(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}e^{3t}$, οπότε $\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 7/4$

$M_X''(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{4}{4}e^{2t} + \frac{9}{4}e^{3t}$, οπότε $\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{4} = 15/4$

$M_X'''(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{8}{4}e^{2t} + \frac{27}{4}e^{3t}$, οπότε $\mathbb{E}[X^3] = M_X'''(0) = \frac{1}{2} + 2 + \frac{27}{4} = 37/4$

Θέμα 8 [25 μονάδες]. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ με πεπερασμένη μέση τιμή μ, και έστω $Y_i = X_i X_{i+1}$ για $i \in \mathbb{N}$.

(1) Υπολογίστε την $\mathbb{E}[Y_i]$.

(2) Είναι η Y_i και η Y_{i+1} ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες? [Ναι/Όχι]

(3) Είναι η Y_i και η Y_{i+2} ανεξάρτητες? Είναι ισόνομες? [Ναι/Όχι]

(4) Έστω $R_n = Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}$. Βρείτε το όριο της R_n/n καθώς $n \to \infty$.

(5) Έστω $S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Βρείτε το όριο της S_n/n καθώς $n \to \infty$.

Λύση:

① $\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[X_i X_{i+1}] \overset{\text{αφού } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_{i+1}] = \mu \cdot \mu = \mu^2$

② Όχι* / Ναι

ΠΡΟΣΟΧΗ: Εξαιτίας αυτού του "Όχι" δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας ΙΝΜΑ στο Ερώτημα 5.

③ Ναι / Ναι

④ Αφού $Y_1, Y_3, \ldots Y_{2n+1}$ ανεξάρτητες κ' ισόνομες με $\mathbb{E}[Y_i] = \mu^2$, έπεται από ΙΝΜΑ ότι:

$$\frac{\overbrace{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}}^{n+1 \text{ όροι}}}{n+1} \to \mu^2$$

Συνεπώς: $$\frac{R_n}{n} = \frac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n+1}}{n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_{2n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \to \mu^2 \cdot 1 = \mu^2$$

⑤ Θέτοντας $m = 2n$, έχουμε:

$$\frac{S_m}{m} = \frac{S_{2n}}{2n} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \cdots + Y_{2n-1} + Y_{2n}}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{Y_1 + Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}}{n}}_{\text{I}} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{Y_2 + \cdots + Y_{2n}}{n}}_{\text{II}}$$

Ο όρος I συγκλίνει στο $\frac{1}{2}\mu^2$ από το ερώτημα 4.

Ο όρος II " " $\frac{1}{2}\mu^2$ με εντελώς παρόμοιο συλλογισμό.

Άρα $\frac{S_m}{m} \to \mu^2$ καθώς $m \to \infty$