<u>Ορισμοί</u>: Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας δακτύλιος

- Αν ο πολλαπλασιασμός έχει ουδέτερο στοιχείο, λέμε ότι ο R είναι <u>δακτύλιος με μονάδα</u>, που συμβολίζεται ως 1_R.
- Αν ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός, λέμε ότι ο R είναι <u>μεταθετικός δακτύλιος</u>
- Αν κάθε στοιχείο του $R\setminus\{0_R\}$ είναι αντιστρέψιμο (ως προς τον πολλαπλασιασμό) λέμε ότι ο R είναι <u>δακτύλιος με διαίρεση</u>

Αν ισχύουν όλα τα παραπάνω και $0_R \neq 1_R$

δηλ. η $(\underset{R\setminus\{0_R\}}{\underset{\shortparallel}{R^*}},\cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα, λέμε ότι ο R είναι <u>σώμα</u>.

<u>Παραδείγματα</u>:

$\mathbb{Z}$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ σώματα

$Mat_n(\mathbb{K})$ δακτύλιος με μονάδα (μη μεταθετικός)

$\mathbb{K}[x]$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

<u>Ορισμός</u> Ένα μη κενό υποσύνολο S του R λέγεται <u>υποδακτύλιος</u> αν είναι δακτύλιος ως προς τις ίδιες πράξεις και με τα ίδια ουδέτερα στοιχεία με το R.

<u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{Z}$ υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν R_1, R_2 δακτύλιοι τότε το καρτεσιανό γινόμενο $R_1 \times R_2$ είναι δακτύλιος με:

$$(a,b) + (c,d) = (a \underset{R_1}{+} c, \ b \underset{R_2}{+} d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \underset{R_1}{\cdot} c, \ b \underset{R_2}{\cdot} d)$$

Εχουμε $0_{R_1 \times R_2} = (0_{R_1}, 0_{R_2})$

Αν R_1, R_2 μεταθετικοί, τότε $R_1 \times R_2$ μεταθετικός

Αν R_1, R_2 με μονάδα, τότε $1_{R_1 \times R_2} = (1_{R_1}, 1_{R_2})$

Ο $R_1 \times R_2$ δεν είναι σώμα:

Αν (a,b) είναι ο αντίστροφος του $(0,1)$ τότε

$(a,b) \cdot (0,1) = (1,1)$

και άρα $a \cdot 0 = 1$ ΑΔΥΝΑΤΟ

<u>Λήμμα</u> Εστω R δακτύλιος. Για κάθε $a \in R$, $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R$

<u>Απόδειξη</u>: $a \cdot 0_R = a \cdot (0_R + 0_R) = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R$

$$\Rightarrow a \cdot 0_R + 0_R = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R$$

$$\Rightarrow 0_R = a \cdot 0_R$$

<u>Ορισμός</u> Μια εξωτερική πράξη σε ένα σύνολο A είναι μια απεικόνιση της μορφής

$$f : S \times A \longrightarrow A$$
$$(s, a) \longmapsto s \cdot a := f(s,a)$$

όπου S είναι ένα άλλο σύνολο.

<u>Παραδείγματα:</u>

- Εστω K ένα σώμα και V ένας διανυσματικός χώρος. Τοτε υπάρχει ένας "εξωτερικός πολλαπλασιασμός"
  $K \times V \longrightarrow V$
  $(\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u$
- Εστω R ένας δακτύλιος. Μπορούμε να ορίσουμε μια εξωτερική πράξη $\mathbb{Z} \times R \longrightarrow R$ ως εξής:

$$n \cdot a = \begin{cases} \overbrace{a + a + \dots + a}^{n \text{ φορές}} & \text{αν } n > 0 \\ 0_R & \text{αν } n = 0 \\ (-n)\cdot(-a) = \underbrace{(-a)+(-a)+\dots+(-a)}_{-n \text{ φορές}} & \text{αν } n < 0 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$, $a \in R$

Ορισμος Εστω K ένα σώμα και V ενα μη κενο συνολο.
Το σύνολο V είναι K-διανυσματικος χωρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις,
μια εσωτερική $+ : V \times V \longrightarrow V$ &
μια εξωτερική $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, με τις εξής ιδιότητες:

- $(V, +)$ είναι αβελιανή ομάδα
- Για κάθε $\lambda, \mu \in K$ και $v, w \in V$ εχουμε:

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$
$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$
$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$$
$$1_K \cdot v = v$$

Παραδειγματα:

$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$\mathbb{R}^n$ είναι $\mathbb{R}$-διαν. χωρος $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

$Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-διαν. χώρος $\qquad \dim_{\mathbb{R}} Mat_{m \times n} = mn$

$\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-διαν. χώρος $\qquad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Παρατήρηση:

- Αν αντί για K σώμα, πάρουμε R δακτύλιο, εχουμε τον ορισμό του R-προτύπου.
- Αν ένα συνολο είναι και δακτύλιος και R-πρότυπο, τοτε λεμε ότι είναι μια R-άλγεβρα.

Το σύνολο $\mathbb{R}^2$

Το $\mathbb{R}^2$ είναι $\mathbb{R}$-διαν. χώρος διάστασης 2.
Επίσης είναι δακτύλιος με πολλαπλασιασμό
$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$.
Έτσι το $\mathbb{R}^2$ δεν είναι σώμα.
Επίσης το γινόμενο δύο μη μηδενικών στοιχείων μπορεί να είναι μηδενικό, π.χ. $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$.

Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^2$ την εξής πράξη:

$$\times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$((a,b),(c,d)) \longmapsto (ac-bd, ad+bc)$$

Η πράξη αυτή είναι:

- προσεταιριστική

$$((a,b)\times(c,d))\times(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\times(e,f)$$
$$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$
$$(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) = (a,b)\times(ce-df, cf+de)$$
$$= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$$

- με ουδέτερο στοιχείο

$$(a,b)\times(1,0) = (a,b) = (1,0)\times(a,b)$$

- μεταθετική

$$(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$
$$(c,d)\times(a,b) = (ca-db, cb+da)$$

- επιμεριστική ως προς την πρόσθεση:

$$(a,b)\times((c,d)+(e,f)) = (a,b)\times(c+e, d+f) =$$
$$= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) =$$
$$= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) =$$
$$= (a,b)\times(c,d) + (a,b)\times(e,f)$$

Ομοίως και από δεξιά.

Άρα το σύνολο $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ είναι δακτύλιος.
Επίσης κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
είναι αντιστρέψιμο με
$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

Πράγματι,
$$(a,b) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \right)$$
$$= (1,0)$$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ του ~~δακτύλιο~~ σώμα $(\mathbb{R}^2, +, \times)$
Έχουμε $1_{\mathbb{C}} = (1,0)$
Επίσης $(0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1_{\mathbb{C}}$
Θέτουμε $i := (0,1)$
Έχουμε $i^2 := i \cdot i = -1_{\mathbb{C}}$
Επίσης $(a,b) = a \cdot (1,0) + b(0,1) = a \cdot 1 + b \cdot i$
$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-διαν. χώρος

$$(a,b) \times (c,d) = (a+bi)(c+di) =$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac - bd + (ad+bc)i$$
$$= (ac-bd, ad+bc)$$

Η έννοια του ομομορφισμού

Έστω A, B δύο αλγεβρικές δομές ίδιου τύπου
(ομάδες, δακτύλιοι, διαν. χώροι, πρότυπα, άλγεβρες).
Ένας <u>ομομορφισμός</u> (τύπος).
είναι μια απεικόνιση $f: A \to B$ που στέλνει
κάθε πράξη του A στην αντίστοιχη του B
Δηλ. $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ αν $(A,*), (B,\circ)$ ομάδες
$f(a \dot{+} b) = f(a) \dot{+} f(b)$ αν A, B δακτύλιοι

→ γραμμική απεικόνιση

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ } Αν A, B K-διαν. χώροι
$f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$ } και $\lambda \in K$.

Αν η f είναι 1-1 και επί, τότε η f ονομάζεται <u>ισομορφισμός</u> (τύπος).
Τα σύνολα A, B είναι <u>ισόμορφα</u> ως (τύπος) αν υπάρχει $f: A \to B$ ισομορφισμός (τύπος).

<u>Π.χ.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση
$x \longmapsto 0$ αλλά όχι ισομορφισμός

<u>Π.χ.</u> $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ισομορφισμός $\mathbb{R}$-διαν. χώρων
$(a,b) \longmapsto a+bi$ αλλά όχι δακτυλίων αν πάρουμε τον σύνηθη πολ/σμό στο $\mathbb{R}^2$

$f((a,b)+(c,d)) = f((a+c, b+d)) =$
$= a+c+(b+d)i = a+bi+c+di = f(a,b)+f(c,d)$
Αν $\lambda \in \mathbb{R}$,
$f(\lambda \cdot (a,b)) = f(\lambda a, \lambda b) = \lambda a + \lambda b i = \lambda(a+bi) = \lambda f(a,b)$
Αν $a+bi = c+di$, τότε $a=c$ και $b=d$
Άρα αν $f(a,b) = f(c,d)$, τότε $(a,b) = (c,d)$.
Επίσης για κάθε $a+bi \in \mathbb{C}$, ισχύει $a+bi = f(a,b)$.
<u>ΟΜΩΣ</u>
$f((a,b)\cdot(c,d)) = f(ac, bd) = ac + bdi$
$f(a,b)\cdot f(c,d) = (a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$
Αν είναι ίσα, τότε $bd = 0$ και άρα $ac + bdi = ac$
οπότε $ad + bc = 0 \underset{bd=0}{\Longrightarrow} bc = 0$ ή $ad = 0$
Αν $b = d = 0$ έχουμε ισότητα
Αν $b = 0$ και $d \neq 0$, τότε $a = 0$ και $(a,b) = (0,0)$
Αν $d = 0$ και $b \neq 0$, τότε $c = 0$ και $(c,d) = (0,0)$
ΑΥΤΟ ΔΕ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΟΙ ΔΥΟ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΜΟΡΦΟΙ. Όμως $\mathbb{R}^2$ όχι σώμα και $\mathbb{C}$ σώμα.

Τελος, η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$a \longmapsto a$$

είναι ομομορφισμος δακτυλίων, 1-1.

Οπότε $\mathbb{R} \cong (\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}, +, \times)$