<u>Παράδειγμα:</u>

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x, y \longmapsto x + y - xy$$

Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική:

$(x * y) * z = (x+y-xy) * z = x+y-xy+z-zx-zy+xyz$

$x * (y+z) = x * (y+z-yz) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$

Η πράξη $*$ είναι μεταθετική:

$x * y = x+y-xy = y+x-yx = y * x$

Η πράξη $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο:

Αν $x * y = x$, τότε $x+y-xy = x$, οποτε $y - xy = y(1-x) = 0$.

Για να ισχύει αυτό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $y = 0$.

Εχουμε $x * 0 = 0 * x = x$ (η πράξη είναι μεταθετική)

Αρα το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$.

Ποια είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ως προς την $*$;

Αν $x * y = 0$, τότε $x+y-xy = 0$ και άρα $y(x-1) = x$.

Αν $x \neq 1$, τότε $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Εχουμε $x * \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x}{1-x} * x = 0$ (η πράξη είναι μεταθετική)

Αν $x = 1$, τότε $x * y = 1 * y = 1 + y - y = 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$

Αρα το 1 δεν είναι αντιστρέψιμο.

Καταλήγουμε ότι:

$\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ είναι μια <u>ομάδα</u>.

Ορισμός Μια **ομάδα** είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη
$* : G \times G \longrightarrow G$ η οποία έχει τις εξής 3 ιδιότητες:

(1) Είναι προσεταιριστική.

(2) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (Συμβ. e ή 1_G ή 1)

(3) Κάθε στοιχείο της G είναι αντιστρέψιμο ($\forall g \in G \ \exists\ g^{-1} \in G : g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$)

$\Downarrow$

$(g^{-1})^{-1} = g$

Αν επιπλέον η πράξη $*$ είναι μεταθετική, λέμε ότι η G είναι **αβελιανή ομάδα** (ή **μεταθετική ομάδα**)

Συχνά γράφουμε $(G,*)$ για την ομάδα G με πράξη $*$.

Παραδείγματα:

$\{1_G\}$ **τετριμμένη ομάδα** με πράξη $1_G * 1_G = 1_G$

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$,

$(Mat_{m\times n}(\mathbb{K}),+)$

$(\mathbb{K}[x],+)$

$(\{-1,1\},\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

$(GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det A \in \mathbb{K}^\times\}, \cdot)$

$(\underbrace{\{f : A \to A,\ f \text{ 1-1 και επί}\}}_{\text{μεταθέσεις του συνόλου } A}, \circ)$

$(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ όπου $x * y = x + y - xy$

Παρατήρηση: Αν πούμε «η ομάδα $\mathbb{Z}$» είναι αυτονόητο ότι μιλάμε για την $(\mathbb{Z},+)$. Η ομάδα $\mathbb{R}^*$ είναι η ομάδα $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ κτλ.

<u>Ορισμός</u> Έστω $(G,*)$ μια ομάδα. Μια <u>υποομάδα</u> της G είναι ένα υποσύνολο $H \subseteq G$ τέτοιο ώστε η $(H,*)$ να είναι ομάδα. Γράφουμε $H \leq G$.

<u>Παραδείγματα:</u>

$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$

$\{1,-1\} \not\leq \mathbb{Z}$, $\{0\} \leq \mathbb{Z}$

<u>Παρατήρηση</u>: Εστω $(G,*)$ ομάδα και $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$.

Η $(H,*)$ είναι ομάδα αν και μόνο αν ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(1) Η $*$ είναι πράξη στο H, δηλ. για κάθε $h_1, h_2 \in H$ έχουμε $h_1 * h_2 \in H$

(2) Η $*$ είναι προσεταιριστική στο H ($\Leftarrow (G,*)$ ομάδα)

(3) $1_G \in H$

(4) Για κάθε $h \in H$, $h^{-1} \in H$

<u>Παράδειγμα:</u>

$\{1,-1\} \not\leq \mathbb{Z}$ γιατί $0 \notin \{1,-1\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \right\} \not\leq GL_2(\mathbb{R}) \text{ γιατί}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Λήμμα: Έστω $(G,*)$ ομάδα και $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$

$H \leq G \Leftrightarrow \forall\ h_1, h_2 \in H : h_1 * h_2^{-1} \in H$

Απόδειξη: Η κατεύθυνση "$\Rightarrow$" είναι προφανής

"$\Leftarrow$" Έστω $h \in H$.

Τότε $h * h^{-1} = 1_G \in H$. Άρα ισχύει η (3).

Αφού $1_G \in H$, τότε $1_G * h^{-1} = h^{-1} \in H$. Άρα ισχύει η (4).

Έστω $h_1, h_2 \in H$. Τότε $(4) \Rightarrow h_2^{-1} \in H$.

Έχουμε $h_1 * (h_2^{-1})^{-1} = h_1 * h_2 \in H$. Άρα ισχύει η (1).

Άσκηση: Αν $(G_1, *)$, $(G_2, \circ)$ είναι ομάδες, τότε το σύνολο $G = G_1 \times G_2$ με πράξη $((a,b),(c,d)) \mapsto (a*c, b\circ d)$ είναι ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο $(1_{G_1}, 1_{G_2})$.

Η ομάδα G με την πράξη αυτή λέγεται το <u>ευθύ γινόμενο</u> των ομάδων G_1 και G_2.

Ορισμός Ένας <u>δακτύλιος</u> είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : R \times R \to R$ και $\cdot : R \times R \to R$ που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

- $(R,+)$ αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο 0_R.
- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική
- $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad \forall\ a,b,c \in R$

  $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \forall\ a,b,c \in R$

  επιμεριστική ιδιότητα (πολλαπλασιασμού ως προς πρόσθεση)

Παραδείγματα δακτυλίων

$\{0\}$ μηδενικός δακτύλιος

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$Mat_n(\mathbb{K})$

$\mathbb{K}[x]$

$R[x]$ όπου R δακτύλιος

Παραδείγματα μη δακτυλίων

$\mathbb{N}$

$Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ με $m \neq n$

$GL_n(\mathbb{K})$