Θεώρημα 11: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Απόδειξη : $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ΒΗΜΑ 1 : $1 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ⊛

Έχουμε $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$

Από την υπόθεση επαγωγής, το τελευταίο είναι ίσο με:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Επίσης, έχουμε:

$(n+2)(2n+3) = 2n^2+4n+3n+6$, και άρα η ⊛ ισχύει

Θεώρημα 12: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί τη σχέση $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Αν $a_1 \in [-\frac{1}{2}, 0]$, τότε $a_n \in [-\frac{1}{n+1}, 0]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη: $P(n)$: $-\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0$

ΒΗΜΑ 1 : $P(1)$: $-\dfrac{1}{2} \leq a_1 \leq 0$ ΑΛΗΘΗΣ (εξ υποθέσεως)

ΒΗΜΑ 2 : Έστω ότι, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0$.

ΒΗΜΑ 3 : Θα δείξουμε ότι $-\dfrac{1}{n+2} \leq a_{n+1} \leq 0$.

Έχουμε $a_{n+1} = a_n + a_n^2 = a_n(a_n+1)$

Αφού $-\dfrac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0$, ισχύει $1-\dfrac{1}{n+1} \leq a_n+1 \leq 1$, και άρα $\dfrac{n}{n+1} \leq a_n+1 \leq 1$

Έχουμε $a_n \leq 0$ και $a_{n+1} > 0$, οπότε $a_n(a_{n+1}) \leq 0$

Επίσης $-\frac{1}{n+1} \leq a_n$ και $\frac{n}{n+1} \leq a_{n+1}$, οπότε $\frac{-n}{(n+1)^2} \leq a_n(a_{n+1})$

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι:

$$\frac{-1}{n+2} \leq -\frac{n}{(n+1)^2} \quad (*)$$

Έχουμε ότι:

$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} \geq \frac{n}{(n+1)^2} \Leftrightarrow n^2+2n+1 \geq n^2+2n \Leftrightarrow 1 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Άρα $a_n(a_{n+1}) \geq -\frac{1}{n+2}$, όπως επιθυμούμε.

Κάποιες φορές το να γνωρίζουμε ότι η πρόταση ισχύει για ένα μόνο φυσικό αριθμό δεν είναι αρκετό ώστε να πραγματοποιήσουμε το επαγωγικό βήμα. Μια ονομαστή περίπτωση τέτοιου είδους επαγωγής είναι η «ισχυρή μαθηματική επαγωγή»

Πρώτο βήμα ή βάση της επαγωγής:

Απόδειξη ότι οι προτάσεις $P(0), P(1), \ldots$ (όσες χρειάζεται) είναι αληθείς

Υπόθεση επαγωγής:

Έστω ότι ισχύει η $P(m)$ για κάθε $m \leq n$

Επαγωγικό βήμα:

Απόδειξη ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής.

<u>Θεώρημα 13</u>: Θεωρούμε τους αριθμούς Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για $n \geq 2$. Έχουμε $F_n < 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδειξη</u>: $P(n): F_n < 2^n$.

ΒΗΜΑ 1: $P(0): F_0 < 2^0$ ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι ισχύει $F_n < 2^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΒΗΜΑ 3: Δεν μπορώ να πω κάτι για το F_{n+1}.

ΟΜΩΣ, αν χρησιμοποιήσουμε ισχυρή μαθηματική επαγωγή:

ΒΗΜΑ 1: $F_0 < 2^0$, $F_1 < 2^1$ ΑΛΗΘΕΙΣ

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι ισχύει $F_m < 2^m$ για κάθε $m<n$ με $n \geq 1$.

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι $F_{n+1} < 2^{n+1}$.

Εχουμε $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Απο την υπόθεση επαγωγης, $F_{n+1} < 2^n + 2^{n-1}$

$2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2+1) = 2^{n-1} \cdot 3 < 2^{n-1} \cdot 4 = 2^{n+1}$ ⊛

Αρα $F_{n+1} < 2^{n+1}$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> στη βάση της επαγωγής!

<u>Παράδειγμα</u>: $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 2$

$P(n): a_n < 2^n$

ΒΗΜΑ 1: $P(0): a_0 < 2^0$ ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι ισχύει $a_m < 2^m$ για κάθε $m \leq n$

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι $a_{n+1} < 2^{n+1}$.

Εχουμε $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Από την υπόθεση επαγωγής, $a_{n+1} < 2^n + 2^{n-1} \overset{⊛}{<} 2^{n+1}$.

ΟΜΩΣ

$a_1 > 2^1$

άρα ΛΑΘΟΣ

Ορισμός: Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι το m είναι διαιρέτης του n, ή ότι το n είναι πολλαπλάσιο του m, αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m \cdot k$

Ορισμός: Ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται πρώτος αν $n > 1$ και οι μόνοι διαιρέτες του n είναι το 1 και το n.

Αν $n > 1$ και n δεν είναι πρώτος, τότε ο n λέγεται σύνθετος.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής (1ο μισό)

Κάθε φυσικός αριθμός $n > 1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Απόδειξη $P(n)$: n γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

ΒΗΜΑ 1: $P(2)$ ΑΛΗΘΗΣ

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι κάθε $m < n$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών, για κάποιο $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι το n γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

Αν ο n είναι πρώτος, τότε η πρόταση ισχύει.

Αν ο n δεν είναι πρώτος, τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $1 < n_1, n_2 < n$ τέτοια ώστε $n = n_1 n_2$.

Από την υπόθεση επαγωγής, τα n_1 και n_2 γράφονται ως γινόμενα πρώτων αριθμών και άρα ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων.

Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας (Εαρινό εξάμηνο 2022-23) (MATH120)

Ασκήσεις

Προεπισκόπηση

Άσκηση 3

Δέκα ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής που θα απαντήσετε online. Κάθε ερώτηση έχει μόνο μία σωστή απάντηση.

Ερώτηση: 1

Αν x,y είναι πραγματικοί αριθμοί με x^2>y^2, τότε τι από τα παρακάτω μπορούμε να συμπεράνουμε;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	x>y. **(Βαθμολογία: 0)**	$x=-2$ $y=1$
☑	|x|>|y|. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Και τα δύο πρώτα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Κανένα από τα δύο πρώτα. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 2

Αν x,y είναι πραγματικοί αριθμοί με x>y, τότε τι από τα παρακάτω μπορούμε να συμπεράνουμε;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	x^2>y^2. **(Βαθμολογία: 0)**	$x=1$ $y=-2$
☐	|x|>|y|. **(Βαθμολογία: 0)**	»
☐	Και τα δύο πρώτα. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Κανένα από τα δύο πρώτα. **(Βαθμολογία: 1)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 3

Έστω $f: A \longrightarrow B$ και $g: B \longrightarrow A$ δύο απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι η σύνθεση $g \circ f$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο A, δηλαδή ότι ισχύει ($g \circ f$)(a)=a για κάθε στοιχείο a του A. Τι από τα παρακάτω μπορούμε να συμπεράνουμε;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Είτε η f είναι επί είτε η g είναι 1-1. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Είτε η f είναι 1-1 είτε η g είναι επί. **(Βαθμολογία: 0)**	

☐	Η f είναι επί και η g είναι 1-1. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Η f είναι 1-1 και η g είναι επί. **(Βαθμολογία: 1)**	$f(x)=f(y) \Rightarrow g(f(x))=g(f(y)) \Rightarrow x=y$ $\forall a \in A,\ a=g(f(a))$.

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 4

Για να δείξουμε ότι το 1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός, ακολουθούμε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα με στόχο την εις άτοπο απαγωγή. Σε ποιο από τα βήματα έγινε το λάθος;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι το 1 δεν είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Βήμα 2: Έστω n ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Βήμα 3: Τότε $n > 1$. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Βήμα 4: Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής με τον θετικό αριθμό n έχουμε $n^2 > 1 \cdot n = n$. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Βήμα 5: Ο n^2 είναι ακέραιος. Δηλαδή βρήκαμε έναν ακέραιο αριθμό, τον n^2, (γνήσια) μεγαλύτερο από τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό n, άτοπο. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 5

Από την ακολουθία συνεπαγωγών "$2 = 4 \Longrightarrow 2\pi = 4\pi \Longrightarrow \sin 2\pi = \sin 4\pi \Longrightarrow 0 = 0$" συμπεραίνουμε εσφαλμένα ότι 2 = 4. Ποια συνεπαγωγή δεν αντιστρέφεται (δηλαδή η αντίστροφή της είναι ψευδής);

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Η πρώτη. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Η δεύτερη. **(Βαθμολογία: 1)**	Η συνάρτηση sinx δεν είναι 1-1
☐	Η τρίτη. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Η πρώτη και η δεύτερη. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Η πρώτη και η τρίτη. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Η δεύτερη και η τρίτη. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	Και οι τρεις. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 6

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι της μορφής 3k ή 3k+1 ή 3k+2 (όπου k ακέραιος). Ο κύβος ενός ακέραιου αριθμού είναι της μορφής:

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	9k ή 9k+1 ή 9k+2. **(Βαθμολογία: 0)**	

☐	9k ή 9k+2 ή 9k+4. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	9k ή 9k+3 ή 9k+6. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	9k-1 ή 9k ή 9k+1. **(Βαθμολογία: 1)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 7

Ένας ακέραιος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 4 αν είναι της μορφής 4k για κάποιον ακέραιο k. Αν το γινόμενο δύο ακεραίων x και y είναι πολλαπλάσιο του 4, τότε τι από τα παρακάτω μπορούμε να συμπεράνουμε για τους ακέραιους x και y;
Όταν γράφω "Δεν ισχύει το 1", εννοώ ότι δεν ισχύει αυτό που αναγράφεται ως πρώτη απάντηση, κοκ.

Απάντηση		Σχόλιο
☐	Είναι και οι δύο άρτιοι. **(Βαθμολογία: 0)**	4·3
☐	Είναι και οι δύο περιττοί. **(Βαθμολογία: 0)**	Γινόμενο περιττών είναι περιττός
☐	Ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός. **(Βαθμολογία: 0)**	2·2
☐	Δεν ισχύει το 1. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	Δεν ισχύει το 2. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Δεν ισχύει το 3. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 8

Αν το άθροισμα δυο ακεραίων x και y είναι άρτιος αριθμός, τι μπορώ να συμπεράνω για τους αριθμούς x και y;

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	Είναι και οι δύο άρτιοι. **(Βαθμολογία: 0)**	$5+3=8$
☐	Είναι και οι δύο περιττοί. **(Βαθμολογία: 0)**	$2+2=4$
☑	Η διαφορά τους είναι άρτιος αριθμός. **(Βαθμολογία: 1)**	
☐	Το γινόμενό τους είναι άρτιος αριθμός. **(Βαθμολογία: 0)**	$5\cdot 3=15$

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 9

Έστω a,b ακέραιοι αριθμοί με a^2>4b. Η εξίσωση x^2+ax+b=0 δεν μπορεί να έχει:

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	δυο ακέραιες ρίζες. **(Βαθμολογία: 0)**	$(x-1)(x-3)=0$
☐	μια ακέραια και μια ρητή ρίζα. **(Βαθμολογία: 0)**	$(x-1)(x-3)=0$
☑	μια ρητή και μια άρρητη ρίζα. **(Βαθμολογία: 1)**	Ρίζες: $(-a\pm\sqrt{\Delta})/2$ όπου $\Delta=a^2-4b$
☐	δύο άρρητες ρίζες. **(Βαθμολογία: 0)**	Αν $\sqrt{\Delta}\notin\mathbb{Q}$, δυο ρίζες άρρητες Αν $\sqrt{\Delta}\in\mathbb{Q}$, δυο ρίζες ρητές.

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Ερώτηση: 10

Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Η εξίσωση x^2+ax+1=0 δεν μπορεί να έχει:

	Απάντηση	Σχόλιο
☐	δύο πραγματικές ρίζες θετικές. **(Βαθμολογία: 0)**	
☐	δύο πραγματικές ρίζες αρνητικές. **(Βαθμολογία: 0)**	
☑	μια πραγματική ρίζα θετική και μια πραγματική ρίζα αρνητική. **(Βαθμολογία: 1)**	ρ_1, ρ_2 οι ρίζες $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1 > 0$
☐	δύο μη πραγματικές ρίζες. **(Βαθμολογία: 0)**	

Βαθμολογία ερώτησης: 1

Συνολική βαθμολογία: 10