Όμοιως βρίσκουμε $|b_k| \leq \frac{c}{k^\alpha}$

12/5/23

Ασκήσεις

11) Δ.ό.: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ με πραγματικές τιμές, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = -\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\,dx$$ και από αυτή συνάγετε

το λήμμα Riemann-Lebesgue στη μορφή $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λύση: Θέτουμε $y = x - \frac{\pi}{n}$ $\left(\to x = y + \frac{\pi}{n} \Rightarrow dx = dy\right)$ και έχουμε:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)\sin(ny+\pi)\,dx = \int_0^{2\pi} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)\cdot(-\sin(ny))\,dy$$

$\to 2\pi$ - περιοδική

$$= -\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\,dx$$

Έπεται ότι $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin(nx)\,dx \Longrightarrow$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\cdot\overbrace{|\sin(nx)|}^{\leq 1}\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|dx$$

$$= \frac{1}{2}\|f - f_{-\frac{\pi}{n}}\|_1 \text{, όπου } f_{-\frac{\pi}{n}} = f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)$$

Έχουμε δείξει ότι $\|f - f_{-\frac{\pi}{n}}\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (10/3/23 θεώρημα)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$ αφού $-\frac{\pi}{n} \to 0$

(1)

15) Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $g\in L^\infty(\mathbb{T})$. Δ.ό.: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(0)\cdot\hat{g}(0)$.

Λύση: Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$

$\left(\text{Αν } f\in L^1(\mathbb{T}) \text{ και } \varepsilon>0: \bullet \exists g\in C(\mathbb{T}) \text{ τ.ω.: } \|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2} \quad \bullet \exists \text{ τριγ. πολ. } p \text{ τ.ω.: } \|g-p\|_1 < \|g-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \right)$

- Ας υποθέσουμε ότι δείξαμε την (1) για $f=p$ τριγ. πολ.
- Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon>0$. Τότε $\exists p$ τριγ. πολ. ώστε $\|f-p\|_1<\varepsilon$
- Άρα: $A_n = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(nx)\,dx - \hat{f}(0)\hat{g}(0)\right| \leq$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)+p(x)g(nx)-p(x)g(nx)\,dx - \hat{f}(0)\hat{g}(0)\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-p(x))g_n(x)\,dx\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)g(nx)\,dx - \hat{f}(0)\hat{g}(0) - \hat{p}(0)\hat{g}(0) + \hat{p}(0)\hat{g}(0)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-p(x)|\cdot|g(nx)|\,dx + \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)g(nx)\,dx - \hat{p}(0)\hat{g}(0)\right|}_{B_n} + \left|(\hat{p}(0)-\hat{f}(0))\hat{g}(0)\right|$$

$$\leq \|g\|_\infty\cdot\|f-p\|_1 + B_n + \|g\|_\infty\cdot\|f-p\|_1$$

$$= 2\|g\|_\infty\|f-p\|_1 + B_n \leq 2\cdot\|g\|_\infty\cdot\varepsilon + B_n \quad \text{με } B_n\xrightarrow{n\to\infty}0$$

- Άρα: $0\leq \limsup_{n\to\infty} A_n \leq 2\varepsilon\|g\|_\infty$, $\forall\varepsilon>0$, άρα $A_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

- Δείχνουμε τώρα την (1) για τριγωνομετρικά πολυώνυμα $p(x)=\sum_{k=-m}^{m}c_k e^{ikx}$

- Η (1) είναι γραμμική ως προς f άρα αρκεί να τη δείξουμε για τις συναρτήσεις e^{ikx}, $k\in\mathbb{Z}$

Δηλ. $\forall k\in\mathbb{Z}$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}g(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & k\neq 0 \\ \hat{g}(0), & k=0 \end{cases}$

και θα χρησιμοποιήσαμε την πυκνότητα των τριγ. πολυωνύμων για την g.

$\sum_{j=-\lambda}^{\lambda} d_j e^{ijx}$

• Για $g = q$ τριγ. πολ. Ζητάμε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} q(nx)dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$, δηλ.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} d_j e^{ij(nx)} dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

• Όμως $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} q(nx)dx = \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} d_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+jn)x} dx \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} q(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} d_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+jn)x} dx$$

$$= \lim_{\substack{a\to\infty \\ a\in\mathbb{N}}} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} d_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax} dx$$ $=0$ για $a\neq 0$ άρα $a\to 0$

$$= 0$$

Άρα: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} q(nx)dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για q τριγ. πολ.

$L^p(X) \supseteq L^q(X)$ για $p<q$, X χώρος πεπ. μέτρου

Οπότε: για γενική $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ $\subseteq L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$ $\exists$ τριγ. πολ. q ώστε: $\|g-q\|_1 < \varepsilon$

Οπότε: $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} g(nx)dx\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{ikx}g(nx) + e^{ikx}q(nx) - e^{ikx}q(nx))dx\right|$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(nx)-q(nx))e^{ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}q(nx)dx\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(nx)-q(nx))e^{ikx}dx\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}q(nx)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(nx)-q(nx)|\cdot\underbrace{|e^{ikx}|}_{=1}dx + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}q(nx)dx\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(nx)-q(nx)|dx + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}q(nx)dx\right|$$

Επίσης: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(nx)-q(nx)|dx \overset{y=nx}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}|g(y)-q(y)|\frac{dy}{n} \overset{g-q \text{ } 2\pi\text{-περιοδική}}{=\!=}$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot n\int_{-\pi}^{\pi}|g(y)-q(y)|\frac{dy}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(y)-q(y)|dy = \|g-q\|_1$$

Άρα, τελικά: $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}g(nx)dx\right| \leq \|g-q\|_1 + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}q(nx)dx\right|$

•για $k\neq 0$ $\to 0$

$$< \varepsilon + \left|\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}q(nx)dx\right|$$

Έτσι: $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} g(nx)\,dx\right| \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon>0 \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} g(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ για } k\neq 0$$

Για $k=0$ έχουμε: $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy$

$$= \hat{g}(0) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{g}(0)$$

Θεώρημα: Υπάρχει $f\in C(\mathbb{T})$: $\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f,0)| = +\infty$

↳ Απόδειξη (Lebesgue): • Γνωρίζουμε ότι $s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• Η f που θα ορίσουμε θα είναι άρτια, άρα:

$s_n(f,0) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \Longrightarrow$

$s_n(f,0) - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• Θα ορίσουμε την f στο $(0,\pi]$ ώστε $\lim_{t\to 0^+} f(t)=0$, οπότε ορίζοντας μετά το $f(0)=0$ θα επεκτείναμε σε άρτια συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ και θδο : $\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{t}\,dt \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

• Η f θα είναι της μορφής $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(n_k x)\cdot \chi_{I_k}(x)$, όπου:

$c_1 = 1 > c_2 > \dots > c_k > c_{k+1}$ και $c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$n_k\in\mathbb{N}$: $n_0=1$, $n_1=2, \dots, n_{k+1} = n_k \cdot N_k$, όπου $N_k\in\mathbb{N}$, $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow$ και $N_k > 2^k$

$I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, δηλ. διαδοχικά διαστήματα με $I_1 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = (0,\pi]$

• Για νδο f είναι συνεχής αρκεί να εξετάσουμε τη συνέχεια στο

$\frac{\pi}{n_k}$, $k\in\mathbb{N}$, δηλ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{n_k}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{n_k}^+} c_k \sin(\underbrace{n_k x}_{\to\pi}) = 0$

και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{n_k}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{n_k}^-} c_{k+1}\cdot\sin(n_{k+1}\cdot x) = c_{k+1}\sin(\overbrace{n_{k+1}\cdot\frac{\pi}{n_k}}^{N_k})$

$= c_{k+1}\sin(N_k\cdot\pi) = 0$

Επίσης αν $0<x\le \frac{\pi}{n_k}$ $\left(\frac{\pi}{n_{k+1}}<x\le\frac{\pi}{n_k}\right.$ για k ελάχιστο με $\left.\frac{\pi}{n_{k+1}}<x\le\frac{\pi}{n_k}\right)$

Τότε $x\in\bigcup\limits_{s=k+1}^{\infty} I_s \Longrightarrow \exists s>k$ ώστε $x\in I_s \Rightarrow |f(x)| = c_s\cdot|\sin(n_s\cdot x)|$

$\le c_s \le c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Άρα $\lim\limits_{t\to0^+} f(t)=0$

17/5/23

↳ <u>Απόδειξη (συνέχεια):</u> Είχαμε εξετάσει τη συνέχεια της f στα σημεία $\frac{\pi}{n_k}$, $k\in\mathbb{N}$

Τώρα θδο $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Ζητώ $\delta>0$ τ.ώ.:
αν $0<t<\delta$ να είναι $|f(t)|<\varepsilon$.
Γνωρίζουμε ότι $c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, άρα $\exists k_0\in\mathbb{N}$ τ.ώ. $\forall k\ge k_0$ είναι $c_k<\varepsilon$

Επιλέγουμε $\delta=\frac{\pi}{n_{k_0}}$. Τότε, για $0<x<\delta=\frac{\pi}{n_{k_0}}$ $\exists s>k_0$ τ.ώ.:
$x\in I_s$ και τότε: $|f(x)| = c_s\cdot|\sin(n_s\cdot x)|\le c_s\le c_{k_0}<\varepsilon \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$
Έτσι: $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)=0$

Ορίζουμε τα c_k, N_k επαγωγικά ($c_1=1$, $n_0=1$, $n_1=2$)
Έστω ότι έχουμε ορίσει $c_1>c_2>\dots>c_k$ και
$n_0<n_1<\dots<n_k<n_{k+1}$, ώστε $n_{j+1}=n_j\cdot N_j$, $j=0,1,\dots,k-1$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_k(x)=\sum\limits_{j=1}^{k} c_j\sin(n_j x)\cdot\chi_{I_j}(x)$

Τότε: $\left|\frac{\varphi_k(x)}{x}\right| \le \begin{cases} 0, & \text{αν } x\in(0,\frac{\pi}{n_k}] \\ \frac{n_k}{\pi}, & \text{αν } x\in[\frac{\pi}{n_k},\pi]\end{cases}$

Άρα, η φ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\pi]$.

Ορίζω την άρτια επέκταση της φ_k στο $[-\pi,\pi]$, ~~οπότε~~ και αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$.

Άρα, από Λήμμα Riemann-Lebesgue: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi \varphi_k(x)\frac{\sin(nx)}{x}dx=0$

→ άρτια άρα $\int_{-\pi}^{\pi}=2\int_0^\pi$

Άρα, μπορούμε να βρούμε $N_k>N_{k-1}, 2^k$: για τον $n_{k+1}=n_k\cdot N_k$ να ισχύει $\left|\int_0^\pi \varphi_k(x)\frac{\sin(n_{k+1}\cdot x)}{x}dx\right|<1$ (1)

Ορίζουμε $c_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{\log N_k}}$. Τότε $N_{k-1}<N_k \Longrightarrow c_{k+1}<c_k$

και, αφού $N_k>2^k$, έχουμε ότι $c_{k+1}<\frac{1}{\sqrt{k\cdot\log 2}}\xrightarrow{k\to+\infty}0$

<u>Ισχυρισμός</u>: $\int_0^\pi f(x)\frac{\sin(n_k\cdot x)}{x}dx\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$

Γράφουμε: $\int_0^\pi f(x)\frac{\sin(n_k\cdot x)}{x}dx=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{n_k}} f(x)\frac{\sin(n_kx)}{x}dx}_{A_k}+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} f(x)\frac{\sin(n_kx)}{x}dx}_{B_k}$

$+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi} f(x)\frac{\sin(n_kx)}{x}dx}_{\Gamma_k}$

• $|A_k|$: Στο $\left(0,\frac{\pi}{n_k}\right]$ έχουμε ότι $|f(x)|\le c_k\le 1$ άρα:

$|A_k|\le\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\left|f(x)\frac{\sin(n_kx)}{x}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\underbrace{|f(x)|}_{\le 1}\frac{|\sin(n_kx)|}{|x|}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{|\sin(n_kx)|}{|x|}dx$

$\le\int_0^{\frac{\pi}{n_k}}\frac{n_k\cdot \cancel{x}}{\cancel{x}}dx=n_k\frac{\pi}{n_k}=\pi\Longrightarrow A_k$ φραγμένο

• $|\Gamma_k|=\left|\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi} f(x)\frac{\sin(n_kx)}{x}dx\right|=\left|\int_0^\pi \varphi_{k-1}(x)\frac{\sin(n_k\cdot x)}{x}dx\right|<1$,

γιατί: $\varphi_{k-1}(x)=\sum\limits_{j=1}^{k-1}c_j\sin(n_jx)\chi_{I_j}(x)$ και

$\varphi_{k-1}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\frac{\pi}{n_{k-1}}\right]\\ f(x), & x\in\left(\frac{\pi}{n_{k-1}},\pi\right]\end{cases}$

και έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση (1).

• $$|B_k| = \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} f(x)\,\frac{\sin(n_k\cdot x)}{x}\,dx = \int_{I_k} f(x)\,\frac{\sin(n_k\cdot x)}{x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} c_k\,\frac{\sin^2(n_k x)}{x}\,dx$$

$$= c_k \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{1-\cos(2n_k\cdot x)}{2x}\,dx = c_k \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{1}{2x}\,dx - c_k \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\cos(2n_k\cdot x)}{2x}\,dx$$

$$\hookrightarrow\ c_k \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{c_k}{2}\Big[\log x\Big]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} = \frac{c_k}{2}\left(\log\frac{\pi}{n_{k-1}} - \log\frac{\pi}{n_k}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log N_{k-1}}}$$

$$= \frac{c_k}{2}\log\left(\frac{\frac{\pi}{n_{k-1}}}{\frac{\pi}{n_k}}\right) = \frac{c_k}{2}\log\left(\frac{n_k}{n_{k-1}}\right) = \frac{c_k}{2}\log N_{k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\log N_{k-1}}{\sqrt{\log N_{k-1}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\log N_{k-1}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\log 2^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\log 2}\cdot\sqrt{k-1} \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$$

$$\hookrightarrow\ \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\cos(2n_k\cdot x)}{x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \left(\frac{\sin(2n_k\cdot x)}{2n_k}\right)'\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$0$$

$$= \left[\frac{\sin(2n_k\cdot x)}{2n_k}\cdot\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} - \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\sin(2n_k x)}{2n_k}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= +\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\sin(2n_k x)}{2n_k x^2}\,dx$$

Επίσης $$\left|\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\cos(2n_k\cdot x)}{x}\,dx\right| \leq \int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{|\sin(2n_k\cdot x)|}{2n_k\cdot x^2}\,dx \leq \frac{1}{2n_k}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

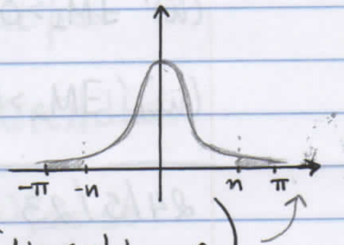
$$= \frac{1}{2n_k}\cdot\frac{1}{\pi/n_k} = \frac{1}{2\pi}$$

άρα είναι $\left|\frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\cos(2n_k\cdot x)}{x}\,dx\right| \leq \frac{c_k}{2}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{c_k}{4\pi} < \frac{1}{2\pi}$ φραγμένο

Τελικά: $B_k \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$, και αφού A_k, Γ_k φραγμένες έχουμε ότι $\int_0^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(nx)}{x}\,dx \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$, επομένως $\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty$

Καλοί Πυρήνες και Προσεγγίσεις της μονάδας.

Ορισμός: Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ ή $L^1(\mathbb{T})$ λέγεται καλός πυρήνας αν:



(i) $\forall \delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\,dx = 1 \quad \left(\text{ή } \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x)\,dx = 1 \right)$

(ii) $\exists M>0 : \forall \delta>0 \quad \|K_\delta\|_1 \leq M$

(iii) $\forall \eta>0 \quad \lim_{\delta\to 0^+} \int_{|x|\geq \eta} |K_\delta(x)|\,dx = 0 \quad \left(\text{ή } \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\pi}\int_{\eta\leq|x|\leq\pi} |K_\delta(x)|\,dx = 0 \right)$

Πρόταση: Έστω $f\in L^\infty(\mathbb{T})$ (φραγμένη). Αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι καλός πυρήνας, τότε $\forall x$ στο οποίο η f είναι συνεχής ισχύει $(f*K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta\to 0^+} f(x)$

↳ Απόδειξη: $\left|(f*K_\delta)(x) - f(x)\right| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_\delta(t)\,dt - f(x)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(t)\,dt}_{=1} \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, βρίσκω $\eta>0$ τ.ώ.: αν $|t|<\eta$ να ισχύει $|f(x-t)-f(x)|\leq\varepsilon$.

Έτσι, έχουμε $\left|(f*K_\delta)(x)-f(x)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\eta} \overbrace{|f(x-t)-f(x)|}^{\leq\varepsilon}\cdot|K_\delta(t)|\,dt +$

$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\eta\leq|t|\leq\pi} |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t|<\eta}|K_\delta(t)|\,dt + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\eta\leq|t|\leq\pi}|K_\delta(t)|\,dt$

$\leq \varepsilon M + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\eta\leq|t|\leq\pi}|K_\delta(t)|\,dt \xrightarrow{\delta\to 0^+} 0$

Άρα $\limsup_{\delta\to 0^+} \left|(f*K_\delta)(x)-f(x)\right| \leq \varepsilon\cdot M$ και αφού το ε ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lim_{\delta\to 0^+}\left|(f*K_\delta)(x)-f(x)\right| = 0$

Πόρισμα: Αν $f\in C(\mathbb{T})$ και $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι καλός πυρήνας, τότε $(f*K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta\to 0^+} f(x)$ ομοιόμορφα.

↳ Απόδειξη: Όμοια με πριν, και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, γιατί η f είναι συνεχής, 2π-περιοδική και άρα το η είναι ανεξάρτητο του x.

Ορισμός: Μια οικογένεια ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(K_\delta)_{\delta>0}$ λέγεται προσέγγιση της μονάδας (στον $L^1(\mathbb{R}^d)$ ή $L^1(\mathbb{T})$) αν:

(i)' $\forall \delta>0$ είναι $\int K_\delta(t)dt = 1$

(ii)' $\exists M_1>0$ τ.ώ.: $\forall \delta>0$, $\forall t$ να ισχύει $|K_\delta(t)| \leq \frac{M_1}{\delta}$

(iii)' $\exists M_2>0$ τ.ώ.: $\forall \delta>0$, $\forall t\neq 0$ να ισχύει $|K_\delta(t)| \leq M_2 \frac{\delta}{t^2}$

24/5/23

<u>Παρατήρηση:</u> Οι (ii)' και (iii)' μαζί είναι ισοδύναμες με την εξής:
$\exists M>0 : \forall \delta>0, \forall t$ να είναι $|K_\delta(t)| \leq M\cdot \min\{\frac{1}{\delta}, \frac{\delta}{t^2}\}$

Πρόταση: Κάθε προσέγγιση της μονάδας είναι καλός πυρήνας

<u>↳ Απόδειξη:</u> Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσέγγιση της μονάδας

• Η (i) είναι ίδια με την (i)'.

(*) Όταν $|t|\leq\delta$ προτιμάμε την (ii)', διαφορετικά την (iii)'

• (ii): $\int |K_\delta(t)|dt \leq \int_{|t|\leq\delta} \frac{M_1}{\delta}dt + \int_{|t|>\delta}\frac{M_2\delta}{t^2}dt$

$= 2\delta\cdot\frac{M_1}{\delta} + 2M\delta\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$

$= 2M_1 + 2M_2 = M < +\infty$

• (iii) Έστω $\eta>0$. Αφού θα πάρουμε $\delta\longrightarrow 0^+$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta<\eta$. Άρα, αν $|t|\geq\eta>\delta$, τότε (μας συμφέρει να πάμε σε):
$|K_\delta(t)| \leq M_2\frac{\delta}{t^2}$ (την (iii)')

Έτσι, έχουμε $0\leq \int_{|t|\geq\eta}|K_\delta(t)|dt \leq M_2\delta\int_{|t|\geq\eta}\frac{1}{t^2}dt = 2M_2\delta\frac{1}{\eta}\xrightarrow{\delta\to0^+}0$

Άρα $\lim_{\delta\to0^+}\int_{|t|\geq\eta}|K_\delta(t)|dt = 0$, $\forall\eta>0$

Πρόταση: Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ καλός πυρήνας. Αν $f\in L^1(\mathbb{R})$ ή $L^1(\mathbb{T})$, τότε:
$\|(f*K_\delta)-f\|_1 \xrightarrow{\delta\to0^+} 0$

↳ <u>Απόδειξη</u>: $\|(f*K_\delta)-f\|_1 = \int |(f*K_\delta)(x) - f(x)|\,dx$

$$= \int \left| \int f(x-t)K_\delta(t)dt - f(x)\underbrace{\int K_\delta(t)dt}_{=1} \right| dx$$

$$= \int \left| \int (f(x-t)-f(x))K_\delta(t)dt \right| dx$$

$$\leq \int\int |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt\,dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=\!=} \int |K_\delta(t)| \underbrace{\int |f(x-t)-f(x)|\,dx}\,dt$$

$$= \int |K_\delta(t)|\cdot\|f_{-t}-f\|_1\,dt \quad (1)$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists n>0$: αν $|t|<n \Longrightarrow \|f_{-t}-f\|_1 \leq \varepsilon$ άρα:

$$(1) \Longrightarrow \|(f*K_\delta)-f\|_1 \leq \int_{|t|<n} |K_\delta(t)|\cdot\|f_{-t}-f\|_1\,dt + \int_{|t|\geq n} |K_\delta(t)|\cdot\|f_{-t}-f\|_1\,dt$$

$$\leq \varepsilon \int_{|t|<n} |K_\delta(t)|\,dt + \int_{|t|\geq n} |K_\delta(t)|\cdot 2\|f\|_1\,dt$$

$$\leq \varepsilon \int |K_\delta(t)|\,dt + 2\|f\|_1 \int_{|t|\geq n} |K_\delta(t)|\,dt$$

$$\leq \varepsilon\cdot M + 2\|f\|_1 \cdot \underbrace{\int_{|t|\geq n} |K_\delta(t)|\,dt}_{\xrightarrow{\delta\to 0^+} 0}$$

Άρα: $\limsup_{\delta\to 0^+} \|(f*K_\delta)-f\|_1 \leq \varepsilon\cdot M, \ \forall\varepsilon>0$

$$\Longrightarrow \|(f*K_\delta)-f\|_1 \xrightarrow{\delta\to 0^+} 0$$

Θεώρημα: Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσέγγιση της μονάδας, $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in Leb(f)$. Τότε, $(K_\delta * f)(x) \xrightarrow[\delta\to 0^+]{} f(x)$ $\quad (K_\delta * f \longrightarrow f$ σ.π.$)$

↳ <u>Απόδειξη</u>: $|(K_\delta*f)(x) - f(x)| = \left|\int f(x-t)K_\delta(t)dt - f(x)\overbrace{\int K_\delta(t)dt}^{=1}\right|$

$$= \left|\int (f(x-t)-f(x))\cdot K_\delta(t)dt\right| \leq \int |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt \quad (*)$$

Ορίζουμε: $A:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $A(r) = \frac{1}{r}\int_{-r}^{r} |f(x-t)-f(x)|\,dt$

Λήμμα: $\lim_{r\to 0^+} A(r) = 0$ και η A είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και φραγμένη

↳ Απόδειξη: Αφού $x \in Leb(f)$ έχουμε: $\lim_{I \downarrow x} \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(y)-f(x)|dy = 0$

διάστημα

$$\xRightarrow[y=x-t]{I=(x-r,x+r)} \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x-t)-f(x)|dt = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} A(r) = 0 \Longrightarrow A(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Έστω $r_0 > 0$ και $r_n \uparrow r_0$ με $r_n \in (0,+\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε, αν $B(r) = \int_{-r}^{r} |f(x-t)-f(x)|dt$

έχουμε $B(r_0) - B(r_n) = \int_{-r_0}^{-r_n} |f(x-t)-f(x)|dt + \int_{r_n}^{r_0} |f(x-t)-f(x)|dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Ολοκληρώνουμε την: $|f(x-t)-f(x)|$ στα: $[-r_0,-r_n]$ και $[r_n,r_0]$, των οποίων τα μέτρα $\longrightarrow 0$ και $r_n \longrightarrow r_0 > 0$. Άρα:

$$A(r_n) = \frac{1}{r_n} \cdot B(r_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{r_0} B(r_0) = A(r_0)$$

Όμοια, δείχνουμε ότι για $r_n \downarrow r_0$ είναι $A(r_n) \longrightarrow A(r_0)$

Έτσι, η $A(r)$ είναι συνεχής. Άρα, επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,+\infty)$ με $A(0) = 0 = \lim_{r\to 0} A(r)$.

Τότε, η A είναι φραγμένη στο $[0,1]$.

Για $r > 1$: $|A(r)| \leq \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} |f(x-t)| + |f(x)|dt$

$$= \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} |f(x-t)|dt + \frac{1}{r} \int_{-r}^{r} |f(x)|dt$$

$$\leq \frac{1}{r} \|f\|_1 + \frac{2\cancel{r}}{\cancel{r}} |f(x)|$$

$$\leq \|f\|_1 + 2|f(x)| < +\infty$$

$<+\infty$ αφού $x \in Leb(f)$

Τελικά, η A είναι συνεχής και φραγμένη στο $[0,+\infty) \longrightarrow$ $\exists B > 0$ τ.ώ. $\forall r \geq 0$ να είναι $|A(r)| \leq B$.

Συνεχίζουμε στην (*) για $\delta>0$:

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt + \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{2^i\delta\le|t|\le 2^{i+1}\delta} |f(x-t)-f(x)|\cdot|K_\delta(t)|\,dt$$

$$\le M\cdot\left(\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|\,dt + \sum_{i=0}^{+\infty}\int_{2^i\delta\le|t|\le 2^{i+1}\delta}|f(x-t)-f(x)|\frac{\delta}{t^2}\,dt\right)$$

$$\le M\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\delta}{2^{2j}\delta^2}\int_{2^j\delta\le|t|\le 2^{j+1}\delta}|f(x-t)-f(x)|\,dt\right)$$

$$\le M\cdot\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2j}\delta}\cdot\frac{2^{j+1}}{2^{j+1}}\int_{-2^{j+1}\delta}^{2^{j+1}\delta}|f(x-t)-f(x)|\,dt\right)$$

$$= M\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{j+1}}{2^{2j}}\frac{1}{(2^{j+1})\cdot\delta}\int_{-2^{j+1}\delta}^{2^{j+1}\delta}|f(x-t)-f(x)|\,dt\right)$$

$$= M\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2}{2^j}A(2^{j+1}\delta)\right)$$

Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \sum_{j=N+1}^{+\infty}\frac{2}{2^j}<\varepsilon \Rightarrow$

$$M\cdot\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{N(\varepsilon)}\frac{2}{2^j}A(2^{j+1}\delta)+\varepsilon B\right)$$

$$\forall\delta>0: |(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le M\left(A(\delta)+\sum_{j=0}^{N(\varepsilon)}\frac{2}{2^j}A(2^{j+1}\delta)+\varepsilon B\right)$$

Οπότε: παίρνοντας limsup καθώς $\delta\to 0^+$ έχουμε:

$$\limsup_{\delta\to0^+}|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le M\left(\lim_{\delta\to0^+}A(\delta)+\sum_{j=0}^{N}\frac{2}{2^j}\lim_{\delta\to0^+}A(2^{j+1}\delta)\right)+\varepsilon\cdot M\cdot B$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, αφήνοντας το $\varepsilon\to0$ παίρνουμε $(f*K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta\to0^+} 0$

Ο Πυρήνας του Fejer

Αθροισιμότητα Cesaro:

- Αν $a_n\in\mathbb{C}$ και $a_n\to \ell\in\mathbb{C}$, τότε $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\ell$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: π.χ. η $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ -1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$ δεν

συγκλίνει, αλλά: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Ορισμός: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ σειρά στο $\mathbb{C}$.

(i) Η σειρά συγκλίνει στον $l \in \mathbb{C}$ αν $s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} \longrightarrow l$

(ii) Η σειρά είναι Cesaro αθροίσιμη στο $l \in \mathbb{C}$ αν

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} l$$

<u>Παρατήρηση:</u> Η 1η σύγκλιση $\longrightarrow$ την 2η σύγκλιση.

Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. αν $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$, $z \neq 1$ και $z_n = z^n$ τότε:

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει, γιατί $|z_n| = 1 \not\longrightarrow 0$, αλλά

με πράξεις βλέπει κανείς ότι $\sigma_n \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{1-z}$

• Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε $s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$

Ο Fejer θεώρησε τους μέσους όρους της $(s_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \cdot \sum_{|k| \le m \le n-1} 1$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikx} (n - |k|)$$

$$= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Επίσης, $\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} = \frac{f * D_0 + f * D_1 + \dots + f * D_{n-1}}{n}$

$$= f * \frac{(D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1})}{n} = f * F_n$$

όπου: $F_n = \frac{D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}}{n}$ είναι ο n-οστός πυρήνας Fejer