S_{n+1}

Άρα, από προηγούμενο Λήμμα: $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$ $\quad (S_n(f) = S_n(g))$

Όμως $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{προηγούμενο μάθημα}} f \equiv g$

Οπότε: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \xrightarrow[\text{ομ.}]{n\to+\infty} f$

26/4/23

Θεώρημα: Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$, τότε $S_n(f,x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{ομ.}} f(x)$ για $x \in \mathbb{T}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$ (δηλ. $\exists f'$ και είναι συνεχής)

Τότε, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right)' dx$

$$= \cancel{\frac{-f(x)e^{-ikx}}{2\pi ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}^{\,0} + \frac{1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx$$

$$\underset{2\pi\text{-περ.}}{\overset{f(x)e^{ikx}}{=}} \frac{1}{ik}\hat{f'}(k), \text{ για } k \neq 0$$

Δηλαδή: $\hat{f}(k) = \frac{1}{ik}\hat{f'}(k)$, για $k \neq 0$

Πρόταση: Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f'}(k) = ik \cdot \hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

↳ <u>Απόδειξη</u>: • Για $k \neq 0$ από την παρατήρηση.

• Για $k = 0$ έχουμε $\hat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω τώρα $f \in C^2(\mathbb{T})$. Τότε $\hat{f''}(k) = ik\,\hat{f'}(k)$
$= (ik)^2 \hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Άρα για $k \neq 0$: $|\hat{f}(k)| = \frac{1}{k^2}|\hat{f''}(k)| \leq \frac{1}{k^2}\|f''\|_1$

Έτσι: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0} |\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(0)| + \sum_{k=-\infty}^{-1} |\hat{f}(k)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|$

$\leq |\hat{f}(0)| + 2\|f''\|_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ και από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται το εξής:

Θεώρημα: Αν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε η $S(f,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Γενικότερα, έχουμε:

Πρόταση: Αν $f \in C^m(\mathbb{T})$, $m \geq 1$ τότε $\widehat{f^{(m)}}(k) = (ik)^m \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$
Ειδικότερα, $\exists\, C_f = \|f^{(m)}\|_1$, $\forall k \neq 0$ ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C_f}{|k|^m}$

Θεώρημα: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{T}$, τότε $f(x_0) = 0$

↳ Απόδειξη: • Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές.

• Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ (αν f συνεχής στο $x_0 \neq 0$, τότε η $g(x) = f(x + x_0)$ είναι συνεχής στο 0 και $\hat{g}(k) = e^{ikx_0} \hat{f}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow g(0) = 0$, δηλ. $f(x_0) = 0$)

• Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι $f(0) \neq 0$ και χ.β.τ.γ. ότι $f(0) > 0$ (αλλιώς $-f$)

Η υπόθεση $\hat{f}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ δίνει ότι $\forall p$ μιγαδικό τριγ. πολυώνυμο ισχύει: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p(x)\, dx = 0$

Θα ορίσουμε $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ μιγαδικών τριγ. πολυωνύμων, τ.ω.: $0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot p_m(x)\, dx \xrightarrow{m \to +\infty} +\infty$ και αυτό θα είναι άτοπο.

Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $\exists\, 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$: $f(x) > \frac{f(0)}{2}$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$
Βρίσκουμε, επίσης, $\varepsilon > 0$: αν $\delta \leq x \leq \pi$, τότε $|\varepsilon + \cos x| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

(*) $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos \searrow (0,\pi)$
$\delta \leq x \leq \pi \Rightarrow$
$\cos\delta \geq \cos x \geq -1$
≥ 1

• Αν $\varepsilon + \cos x < 0$, τότε $|\varepsilon + \cos x| = -\varepsilon - \cos x \leq 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
• Αν $\varepsilon + \cos x \geq 0$, τότε $|\varepsilon + \cos x| = \varepsilon + \cos x \overset{(*)}{\leq} \varepsilon + \cos\delta \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
αν $\varepsilon \leq \frac{2}{3}(1 + \cos\delta)$

Παρατηρούμε ότι: αν $p(x) = \varepsilon + \cos x$, τότε $p(0) = \varepsilon + 1 \Rightarrow$
$\exists \eta \in (0, \delta)$: $\varepsilon + \cos x > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in (0, \eta)$

Επίσης, αφού $\varepsilon + \cos x$ άρτια έχουμε: $|\varepsilon+\cos x| \le 1-\frac{\varepsilon}{2}$ και για $-\pi \le x \le \pi$

Ορίζουμε $p_m(x) = p(x)^m = (\varepsilon+\cos x)^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

Υπολογίζουμε το $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, p_m(x)\,dx = \int_{-\eta}^{\eta} f(x) p_m(x)dx + \int_{\eta\le|x|\le\delta} f(x)p_m(x)dx$

$$+ \int_{\delta\le|x|\le\pi} f(x)p_m(x)dx = A_m + B_m + \underbrace{\Gamma_m}_{\to +\infty \text{ (άτοπο)}}$$

- Στο $(-\eta,\eta)$ έχουμε: $f(x)\cdot p_m(x) > \frac{f(0)}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \Rightarrow A_m \ge 2\eta \frac{f(0)}{2} \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty$

- Στο $\overset{>0}{\eta} \le |x| \le \overset{\in(0,\frac{\pi}{2})}{\delta}$ έχουμε: $f(x) > \frac{f(0)}{2} > 0$ και $\varepsilon + \cos x > 0$ $(x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$
$\Rightarrow f(x) \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \Longrightarrow f(x)\cdot p_m(x) \ge 0$ $\forall x$ με $\eta \le |x| \le \delta \Rightarrow B_m \ge 0$.

- Στο $\delta \le |x| \le \pi$ έχουμε: $|p(x)| = |\varepsilon+\cos x| \le 1-\frac{\varepsilon}{2}$.
Άρα $|\Gamma_m| \le \int_{\delta\le|x|\le\pi} |f(x)| \cdot \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m dx \le \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx}_{<+\infty} \xrightarrow{m\to+\infty} 0$

- Έστω, τώρα, ότι η f παίρνει μιγαδικές τιμές, τότε $f = u + iv$ με $u, v \in L^1(\mathbb{T})$ πραγματικές και συνεχείς στο x_0.
Θέτουμε $g = \bar{f} = u - iv \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$ $\hat{g}(k) = \hat{\bar{f}}(k) = \overline{\hat{f}(-k)} = 0$
Όμως, $u = \frac{f+g}{2} \Rightarrow \hat{u}(k) = \frac{\hat{f}(k)+\hat{g}(k)}{2} = 0$

$$v = \frac{f-g}{2i} \Rightarrow \hat{v}(k) = \frac{\hat{f}(k)-\hat{g}(k)}{2i} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Από την πραγματική περίπτωση, έχω $u(x_0) = 0 = v(x_0)$ και άρα $f(x_0) = 0$.

Πυρήνας Dirichlet

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε $S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy\right)e^{ikx}$
$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{ik(x-y)}dy\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}dy$

Για $D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ έχουμε $S_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot D_n(x-y)\,dy=(f*D_n)(x)$.

Ορισμός: Ο πυρήνας του Dirichlet είναι η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(D_n)_{n=1}^{\infty}$

<u>Ιδιότητες:</u> (1) $D_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$

$\cos kt=\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$

↳ <u>Αποδ.</u> $D_n(t)=1+\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}+\sum_{k=-n}^{-1}e^{ikt}=1+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ikt}+e^{-ikt}\right)$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos(kt)$$

(2) $D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac12\right)t}{\sin\left(\frac t2\right)}$, αν $0\le|t|\le\pi$ και $D_n(0)=2n+1$

↳ <u>Αποδ:</u> $D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=e^{-int}\sum_{k=-n}^{n}e^{i(k+n)t}=e^{-int}\sum_{k=0}^{2n}e^{ikt}$

$$=e^{-int}\,\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1}=\frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{e^{it}-1}$$

$$=\frac{\cancel{e^{\frac{it}{2}}}\left(e^{i(n+\frac12)t}-e^{-i(n+\frac12)t}\right)}{\cancel{e^{it/2}}\left(e^{it/2}-e^{-it/2}\right)}$$

$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$=\frac{\cancel{2i}\,\sin\left(n+\frac12\right)t}{\cancel{2i}\,\sin\left(\frac t2\right)}=\frac{\sin\left(n+\frac12\right)t}{\sin\left(\frac t2\right)}$$

• $D_n(0)=\sum_{k=-n}^{n}e^{(ik\cdot 0)}=\sum_{k=-n}^{n}1=2n+1$

(3) $\forall t\in\mathbb{R}$ $|D_n(t)|\le 2n+1$ και $D_n(0)=2n+1$ (από πριν)

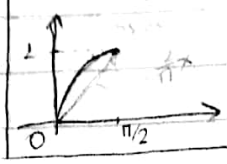
↳ <u>Αποδ.</u> $|D_n(t)|\le\sum_{k=-n}^{n}\overbrace{|e^{ikt}|}^{=1}=2n+1$.

(4) Αν $0<|t|\le\pi$, τότε $|D_n(t)|=\frac{\left|\sin\left(n+\frac12\right)t\right|}{\left|\sin\left(\frac t2\right)\right|}\le\frac{1}{\left|\sin\left(\frac t2\right)\right|}$

(*) Για $0<t\le\pi\Rightarrow 0<\frac t2\le\frac{\pi}{2}$ άρα: $\sin\left(\frac t2\right)\ge\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{2}=\frac{t}{\pi}>0$

Άρα: $|D_n(t)|\le\frac{\pi}{t}=\frac{\pi}{|t|}$ αν $t\in(0,\pi)$

(*) Για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$



Όμως η $D_n(t)$ είναι άρτια, άρα $|D_n(t)| = |D_n(-t)| \leq \frac{\pi}{-t} = \frac{\pi}{|t|}$ αν $-\pi < t < 0$

Τελικά: $|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{|t|}$, $0 < |t| \leq \pi$.

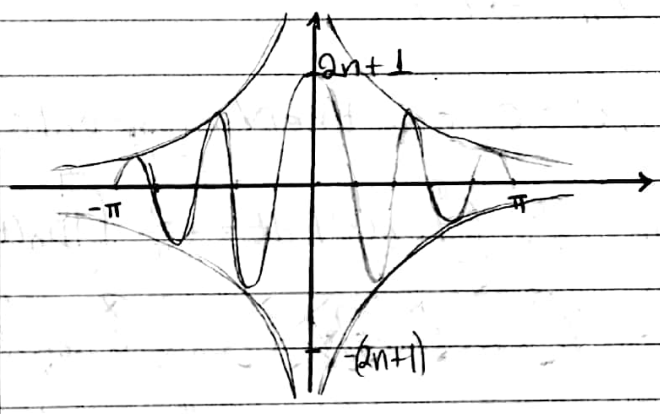
28/4/23.

(5) Η D_n αλλάζει πρόσημο αρκετές φορές στο $[-\pi,\pi]$ (όταν το n είναι μεγάλο)

Στο $(0,\pi)$: $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ και $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = 0 \Leftrightarrow \left(n+\frac{1}{2}\right)t = k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2k\pi}{2n+1} < \pi$ για $k < n+\frac{1}{2}$

Με βάση αυτά έχουμε τη γραφική παράσταση:



(6) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \hat{D}_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}dt = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{ikt}}{ik}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} + \sum_{0<|k|\leq n}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}}{ik}\right)$

$= 1 + \sum_{0<|k|\leq n}\frac{1}{2\pi ik}\underbrace{\left(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right)}_{=0 \text{ αφού διαφέρουν κατά } 2\pi \ (e^{ikt}\ 2\pi\text{-περιοδική})} = 1$

Άρα $\hat{D}_n(0) = 1$

Ορισμός: Η n-οστή σταθερά Lebesgue είναι ο αριθμός
$L_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt$

<u>Ερώτημα:</u> Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ ή καλύτερα $f \in C(\mathbb{T})$. Είναι σωστό ότι $\forall x \in \mathbb{T}$ η ακολουθία $S_n(f,x)$ είναι φραγμένη;

Έχουμε $|S_n(f,x)| = |(f * D_n)(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot D_n(y)\,dy\right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)\cdot D_n(y)|\,dy$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_\infty \cdot |D_n(y)|\,dy$$

$$= \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(y)|\,dy = \|f\|_\infty \cdot L_n$$

Οπότε, αν η (L_n) ήταν φραγμένη ακολουθία, τότε [redacted] για συνεχείς συναρτήσεις f, η $S_n(f,x)$ θα ήταν φραγμένη.

Θεώρημα: $L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\cdot \log n$ άρα $L_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

Ορσ.: Λέμε ότι $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \exists C>0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n - b_n| \leq C$

↳ <u>Απόδειξη Θεωρ.:</u> $L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt \overset{\text{άρτια}}{=} \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}|D_n(t)|\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{\underbrace{\sin(\frac{t}{2})}_{>0}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin(n+\tfrac{1}{2})t|\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t/2}\right)}_{\varphi(t)}dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t/2}\,dt$$

Θέτουμε $\varphi(t) = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t/2}$

Τότε $\lim_{t\to 0^+}\varphi(t) = 0 \quad (*)$

Άρα, η φ είναι φραγμένη (αν θέσουμε $\varphi(0)=0$, τότε η φ γίνεται συνεχής στο $[0,\pi]$ και άρα φραγμένη)

Έτσι, $\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}|\sin(n+\tfrac{1}{2})t|\cdot\varphi(t)\,dt\right|$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{|\sin(n+\tfrac{1}{2})t|}_{\leq 1}\cdot|\varphi(t)|\,dt$$

$(*)$ $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) =$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\left(\frac{t}{\sin t} - 1\right)\right)$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t - \sin t}{t\sin t}\right)$

$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t + t\cos t}\right)$

$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\sin t}{\cos t + \cos t - t\sin t}\right)$

$= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\overset{\to 0}{\sin t}}{\underbrace{2\cos t - t\sin t}_{\downarrow t\to 0^+\ 2}}\right) = 0$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \|\varphi|_{[0,\pi]}\|_\infty \, dt = \frac{1}{\pi}\|\varphi|_{[0,\pi]}\|_\infty \cdot \pi = \|\varphi|_{[0,\pi]}\|_\infty$$

Άρα: $L_n \sim \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac12)t|}{t}\,dt \xrightarrow[\substack{t=\frac{y}{n+\frac12}\\ dy=(n+\frac12)dt}]{y=(n+\frac12)t} \frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+\frac12)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dt$

Παρατηρούμε ότι $\int_0^\pi \frac{|\sin y|}{y}\,dy = \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy$ υπάρχει, γιατί $\frac{\sin y}{y}\xrightarrow{y\to 0^+} 1$

Οπότε: $\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin y|}{y}\,dy \leq \int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y}\,dy \leq \frac{1}{n\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2} = \frac{1}{2n}\leq\frac{1}{2}$

Άρα $L_n \sim \frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin y|}{y}\,dy = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy \xrightarrow[x=y-k\pi]{dx=dy}$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin(x+k\pi)|}{x+k\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx$$

Επίσης $\forall k=1,2,\dots,n-1$: $\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi|\sin x|\,dx \leq \int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx \leq \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi|\sin x|\,dx$

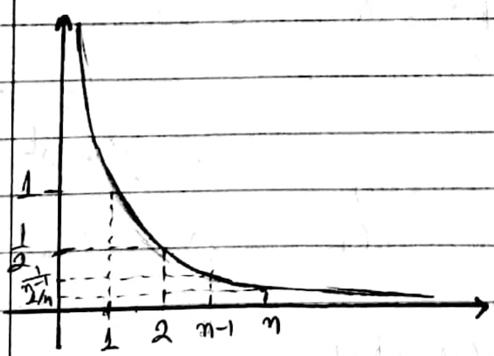
$$\frac{1}{(k+1)\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi \leq \int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx \leq \frac{1}{k\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$\frac{-(-1)-(-1)}{(k+1)\pi} \leq \int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx \leq \frac{1}{k\pi}\,2$$

$$\frac{2}{(k+1)\pi} \leq \int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x+k\pi}\,dx \leq \frac{2}{k\pi}$$

Άρα: $\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \frac{2}{\pi}\int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin y|}{y}\,dy \leq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

Μένει νδο: $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right| \leq C$, για κάποιο $C>0$



$$1+\frac12+\frac13+\dots+\frac{1}{n-1} \leq 1+\int_1^2\frac{1}{x}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_{n-2}^{n-1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1+\int_1^{n-1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1+\log(n-1)$$

$$\leq 1+\log n$$

Ομοίως: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} \geq \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n+1) - \log 2$$

$$\geq \log n - \log 2$$

Άρα $L_n \sim \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin y|}{y}\,dy \sim \frac{4}{\pi^2} \log n$

Θεώρημα 1: Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ.: η σειρά Fourier της f αποκλίνει σε κάποιο σημείο.
Πιο συγκεκριμένα $\exists f \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ: $\sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f,0)| = +\infty$

Πρόταση 1: $L_n = \sup\{|s_n(f,0)| : f \in C(\mathbb{T}),\ \|f\|_\infty \leq 1\}$

↳ Απόδειξη Πρότασης: Αν $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$, τότε:

το είδαμε στο Ερώτημα

$$|s_n(f,0)| = |(f * D_n)(0)| \leq \|f\|_\infty \cdot L_n \leq L_n$$

Άρα $\sup\{|s_n(f,0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1\} \leq L_n$.

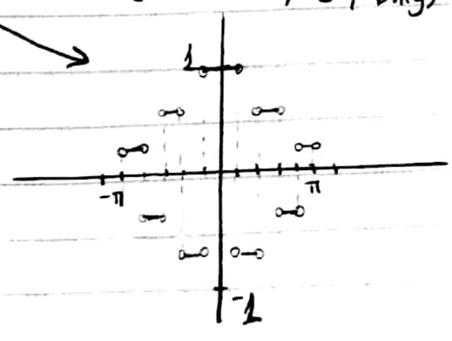
Για το "$\geq$" παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ τ.ώ.: $|s_n(f,0)| > L_n - \varepsilon$

άρτια

Δηλαδή: $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot D_n(0-y)\,dy\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cdot D_n(-y)\,dy\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(y)\,dy\right| \geq L_n - \varepsilon.$

Η D_n αλλάζει πρόσημο πεπερασμένο πλήθος φορές στο $[-\pi,\pi]$
Έτσι, αν ορίσουμε $h(y) = \operatorname{sgn} D_n(y) = \begin{cases} 1, & D_n(y) > 0 \\ 0, & D_n(y) = 0 \\ -1, & D_n(y) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{D_n(y)}{|D_n(y)|}, & D_n(y) \neq 0 \\ 0, & D_n(y) = 0 \end{cases}$

Η h θα είναι κατά διαστήματα σταθερή και έχει ασυνέχειες στις ρίζες της $D_n(y)$ οι οποίες είναι πεπερασμένες
$\longrightarrow$ Η h είναι Riemann-ολοκληρώσιμη



Επίσης, $h \in L^\infty$ και $\|h\|_\infty = 1$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\cdot D_n(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)|\,dy = L_n$$

Χρησιμοποιούμε το εξής: αφού h είναι Riemann-ολοκληρώσιμη έχουμε ότι $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists f\in C(\mathbb{T}) \text{ τ.ώ: } \|f-h\|_1<\varepsilon \text{ και } \|f\|_\infty \le \|h\|_\infty}$

Συνεπώς, μπορούμε να προσεγγίσουμε την h με συνεχή f, τ.ώ. $\|f\|_\infty \le \|h\|_\infty = 1$ και $\|f-h\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)-h(y)|dy < \varepsilon/_{2n+1}$

Τότε:
$$|s_n(f,0)| = |(f*D_n)(0)| = |(h*D_n)(0)+((f-h)*D_n)(0)|$$
$$\ge \underbrace{|(h*D_n)(0)|}_{=L_n} - |((f-h)*D_n)(0)|$$
$$\ge L_n - \|f-h\|_1 \cdot \|D_n\|_\infty$$
$$> L_n - \frac{\varepsilon}{2n+1}\cdot(2n+1)$$
$$> L_n - \varepsilon$$

Θεώρημα Banach-Steinhaus

Ορισμός: Έστω X, Y χώροι με νόρμα πάνω απ' το $\mathbb{C}$. Μια απεικόνιση $T: X\to Y$ λέγεται γραμμικός τελεστής, αν $\forall x,y\in X$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$: $T(\lambda x+\mu y) = \lambda\cdot T(x)+\mu T(y)$

Ο γραμμικός τελεστής λέγεται φραγμένος αν $\exists M>0$ τ.ω. $\forall x\in X$ $\|T(x)\| \le M\cdot\|x\|$.

Θεώρημα (Banach-Steinhaus): Έστω X χώρος Banach (πλήρης χώρος με νόρμα), Y χώρος με νόρμα και $T_n: X\to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, τ.ώ.: $\forall x\in X$ να ισχύει $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < +\infty$

Τότε, $\exists M>0$, ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in X$: $\|T_n(x)\| \le M\cdot\|x\|$
(δηλ. $\|T_n\| \le M$)

3/5/23

Θεώρημα (Banach-Steinhaus): Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n: X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, τ.ω.: $\forall x \in X$ να ισχύει ότι $\sup_n \|T_n(x)\| < +\infty$
Τότε: $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ είναι $\|T_n(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ $(\|T_n\| \leq M)$

Λήμμα (Osgood): Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη $\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty\right)$.
Τότε $\exists x_0 \in X$ και $r > 0$, $M > 0$, ώστε $\forall x \in B(x_0, r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ να ισχύει ότι $|f_n(x)| \leq M$.

↳ __Απόδειξη:__ Θέτουμε $F_n = \{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq n\}$

Τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι κλειστό (ως τομή κλειστών)

Έτσι, από το Θ. Baire $\exists x_0 \in X, r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq F_{n_0}$

↳ __Απόδειξη Θεωρήματος:__ Ορίζουμε $f_n(x) = \|T_n(x)\|$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$

- f_n συνεχής διότι:
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(z)| &= \big| \|T_n(x)\| - \|T_n(z)\| \big| \\ &\leq \|T_n(x) - T_n(z)\| \\ &= \|T_n(x - z)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x - z\| \\ &\Longrightarrow f_n \text{ Lipschitz συνεχής} \\ &\Longrightarrow f_n \text{ συνεχής } \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- $\forall x \in X$ $\sup_n |f_n(x)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < +\infty$ από υπόθεση.

Άρα, από λήμμα Osgood, $\exists x_0 \in X, r > 0, M > 0$ ώστε: $\forall x \in B(x_0, r)$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ να είναι $\|T_n(x)\| \leq M$ $(*)$

Έστω $x \in X \setminus \{0\}$. Τότε: $\left(x_0 + \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \in B(x_0, r)$, αφού:

$\left\| x_0 + \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| = \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{r}{2} < r$ και $x_0 \in B(x_0, r)$
Οπότε $\left\|T_n\left(x_0 + \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M$ και $\|T_n(x_0)\| \leq M$

Τότε: $\left\| T_n\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\| T_n\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}+x_0-x_0\right)\right\|$

$$= \left\| T_n\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|}+x_0\right) - T_n(x_0)\right\|$$
$$\leq \left\| T_n\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}+x_0\right)\right\| + \| T_n(x_0)\|$$
$$\leq 2M$$

Όμως: $\left\| T_n\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{r}{2\|x\|} T_n(x)\right\| = \frac{r}{2\|x\|}\| T_n(x)\|$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Επομένως: $\frac{r}{2\|x\|}\| T_n(x)\| \leq 2M \Longrightarrow \| T_n(x)\| \leq \frac{4M}{r}\|x\|$

Οπότε για $M' = \frac{4M'}{r}$ έχουμε το ζητούμενο. ($\| T_n\| < \frac{4M}{r}, \forall n\in\mathbb{N}$)

Θεώρημα 11 Υπάρχει $f\in C(\mathbb{T})$ τ.ω. η σειρά Fourier της f αποκλίνει σε κάποιο σημείο.

Συγκεκριμένα $\exists f\in C(\mathbb{T})$, ~~___~~ τ.ω. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |s_n(f,0)| = +\infty$

→ πλήρης

↳ Απόδειξη: Ορίζουμε $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $T_n(f) = s_n(f,0)$. Κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής:

Πράγματι, αν $f,g\in C(\mathbb{T})$ και $\alpha,b\in\mathbb{C}$, τότε $T_n(\alpha f+b\cdot g) =$
$= s_n(\alpha f+bg, 0) = \alpha\cdot s_n(f,0) + b\cdot s_n(g,0) = \alpha T_n(f) + b\cdot T_n(g)$

Επίσης, κάθε T_n είναι φραγμένος: $|T_n(f)| = |s_n(f,0)| =$
$= |(f * D_n)(0)| \underset{f\in C(\mathbb{T})}{\leq} \|f\|_\infty\cdot\|D_n\|_1 = L_n\cdot\|f\|_\infty \leq c\cdot\log(n+1)\|f\|_\infty$

Έστω, προς άτοπο, ότι $\forall f\in C(\mathbb{T})$ η ακολουθία $(s_n(f,0))_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, δηλ. $\sup\limits_n |T_n(f)| = \sup\limits_n |s_n(f,0)| < +\infty$.

Από το Θ. Banach Steinhaus $\exists M>0$: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall f\in C(\mathbb{T})$:
$|T_n(f)| \leq M\cdot\|f\|_\infty \Longrightarrow$
$\forall n\in\mathbb{N}$: $\sup\limits_n\{|s_n(f,0)| : f\in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty\leq 1\} \leq M$

Όμως από Πρόταση 1 (προηγούμενο μάθημα) έχω ότι:
$\sup\limits_n\{|s_n(f,0)| : f\in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty\leq 1\} = L_n$
$\Longrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $L_n\leq M$, άτοπο, διότι $L_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Θεώρημα (Dini): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ παραγωγίσιμη σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{T}$, τότε: $S_n(f,x_0) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x_0)$

Ορσ.: Για $n \geq 2$ ορίζουμε $D_n^* = \dfrac{D_n + D_{n-1}}{2}$ και $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε $S_n^*(f,x) = (f * D_n^*)(x)$

<u>Παρατήρηση</u>: Για $y \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$

$$D_n^*(y) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y - \sin(n-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}} = \frac{\cancel{2}\sin(ny)\cos\frac{y}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{y}{2}} = \frac{\sin(ny)}{\tan\frac{y}{2}}$$

και: $D_n(y) - D_n^*(y) = \dfrac{D_n(y) - D_{n-1}(y)}{2} = \dfrac{e^{int}+e^{-int}}{2} = \cos(nt)$

Άρα:
$$\begin{aligned} S_n(f,x) - S_n^*(f,x) &= (f*D_n)(x) - (f*D_n^*)(x) \\ &= (f*(D_n - D_n^*))(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)(D_n - D_n^*)(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cdot\cos(nt)\,dy \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \end{aligned}$$

(από το Λήμμα Riemann-Lebesgue για $y \to f(x-y) =$ 2π-περιοδική)

Γι' αυτό τον λόγο, αν θέλω να εξετάσω τη σύγκλιση της ακολουθίας $S_n(f,x)$ μπορούμε ισοδύναμα να εξετάσουμε τη σύγκλιση της $S_n^*(f,x) = (f*D_n^*)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n^*(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cdot\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{\sin(nt)}{\tan\frac{t}{2}} + \frac{\sin(nt)}{t/2} - \frac{\sin(nt)}{t/2}\right)dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sin(nt)\left(\frac{1}{\tan t/2} - \frac{1}{t/2}\right)dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin(nt)}{t/2}\,dt}_{I_2}$$

- $I_1 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, διότι αν ορίσουμε $g(t) = \dfrac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t/2}$ έχουμε

$$\frac{1}{\tan t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \tan t}{t\cdot\tan t} \underset{t\to 0}{\overset{DLH}{\sim}} \frac{(t-\tan t)'}{(t\cdot\tan t)'} = \frac{1-(1+\tan^2 t)}{\tan t + t(1+\tan^2 t)}$$

$$= \frac{\tan^2 t}{t\tan^2 t + \tan t + t} \overset{DLH}{\sim} \frac{2\tan t(1+\tan^2 t)}{2t\tan t(1+\tan^2 t) + \tan^2 t + (t+\tan t) + 1} = \frac{2\tan t(1+\tan^2 t)}{2(1+\tan^2 t) + 2t\tan t(1+\tan^2 t)}$$

$$\xrightarrow{t\to 0} \frac{2\cdot 0(1+0)}{2\cdot(1+0)+0} = \frac{0}{2} = 0$$

Άρα $\lim_{t\to 0} g(t) = 0 \Rightarrow g\in L^1(\mathbb{T}) \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t/2}\right)\sin(nt)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$

- Άρα, τελικά: $\left| S_n^{**}(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\frac{\sin(nt)}{t}\,dt \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Θεώρημα (Dini): Έστω ~~[illegible]~~ $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $x\in\mathbb{T}$ τ.ω. $\exists\, \alpha\in\mathbb{C}$ με:
$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha\right|\frac{dt}{t} < +\infty, \text{ τότε } S_n(f,x) \longrightarrow \alpha.$$

<u>Παρατήρηση:</u> Από αυτό έπεται το προηγούμενο Θεώρημα Dini
Πράγματι, αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\exists f'(x_0)$ για κάποιο $x_0\in\mathbb{T}$ τότε $\exists\,\delta>0$
τ.ω. αν $0<|y-x_0|<\delta$ τότε: $\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - f'(x_0)\right| < 1$

$$\xRightarrow{\cdot|y-x_0|} \big|f(y)-f(x_0) - f'(x_0)\cdot|y-x_0|\big| < |y-x_0|$$
$$\Longrightarrow |f(y)-f(x_0)| \le (1+|f'(x_0)|)\,|y-x_0| \text{ για } 0<|y-x_0|<\delta$$

Έστω $M = 1+|f'(x_0)|$, τότε για $0<|t|<\delta$ έχουμε:
$|f(x_0+t)-f(x_0)| \le M\cdot|t|$ και $|f(x_0-t)-f(x_0)| \le M\cdot|t|$

Έτσι: $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - f(x_0)\right|\frac{1}{t}\,dt \le$

$$\int_0^{\delta}\left(\frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{2} + \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt$$
$$+\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2} - f(x_0)\right|\frac{1}{t}\,dt$$
$$\le \int_0^{\delta}\left(\frac{M|t|}{2}+\frac{M|t|}{2}\right)\frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2} - f(x_0)\right|dt$$
$$= \int_0^{\delta} M\,dt + \frac{1}{\delta}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2} - f(x_0)\right|dt < +\infty$$

Από το Θ. Dini $S_n(f,x_0) \longrightarrow f(x_0)$

Πρόταση (Αρχή τοπικότητας του Riemann): Έστω $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ και $x\in\mathbb{T}$ τ.ω. $\exists\,\delta>0$ με $f\equiv g$ στο $(x-\delta,x+\delta)$. Τότε $S_n(f,x)-S_n(g,x) \longrightarrow 0$

↳ <u>Απόδειξη:</u> $s_n(f,x) - s_n(g,x) = s_n(f-g,x)$

Όμως $f-g \equiv 0$ στο $(x-\delta, x+\delta)$ άρα $\exists (f-g)'(x) = 0$.
Άρα, από Θ. Dini $s_n(f-g,x) \longrightarrow (f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow$
$s_n(f,x) - s_n(g,x) \longrightarrow 0$.

5/5/23

Θεώρημα (Κριτήριο Dini) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $x \in \mathbb{T}$ τ.ω. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ με:
$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \alpha \right| dt < +\infty \text{, τότε } s_n(f,x) \xrightarrow{n\to+\infty} \alpha$$

↳ <u>Απόδειξη:</u> • Είχαμε δει ότι αν $D_n^*(t) = \dfrac{D_n(t)+D_{n+1}(t)}{2}$ και $s_n^*(f,x) = (f * D_n^*)(x)$, τότε $s_n(f,x) - s_n^*(f,x) = \left(f * (D_n - D_n^*)\right)(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• Επίσης $s_n^*(f,x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{\tan(t/2)} dt$

και: $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{\tan(\frac{t}{2})} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t/2} dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

• Αρκεί, λοιπόν, νδο: $\underbrace{\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt}_{I_2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Γράφουμε: $I_2 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt \right.$
$+ \left. \displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt \right) \underset{\text{στο } 2^{\text{ο}} \text{ ολοκλ.}}{\overset{s=-t}{=\!=}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(x+s) \frac{\sin(-ns)}{-s} ds$
$= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(nt)}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) \frac{\sin(ns)}{s} ds$
$= \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} \cdot \frac{\sin(nt)}{t} dt$

Επιπλέον: $\alpha = \alpha \cdot \overbrace{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(t) dt}^{=1} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{\tan(\frac{t}{2})} dt \overset{\text{διαφέραν κατά } \gamma_n \to 0}{\text{"="}}$

$\dfrac{\alpha}{2\pi} \displaystyle\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{t/2} dt}_{} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{t} dt$

άρτια: $\dfrac{\sin(-nt)}{-t/2} = \dfrac{-\sin(nt)}{-t/2} = \dfrac{\sin(nt)}{t/2}$

• $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t/2} \right) \sin(nt) dt \xrightarrow[\text{Riemann Lebesgue}]{n\to\infty} 0$

αφού η $g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tan\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t/2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

είναι στον $L^1(\mathbb{T})$

Άρα, αρκεί νδο: $\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\right)\frac{1}{t}\sin(nt)dt\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

• Από την υπόθεση, η $h(t)=\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\pi]$ και από το λήμμα Riemann-Lebesgue $\int_0^{\pi}h(t)\sin(nt)dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\sin(nt)dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ και το ζητούμενο έπεται.

Εφαρμογές: (1) Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ παραγωγίσιμη στο x, τότε ικανοποιείται η υπόθεση του Dini, άρα $S_n(f,x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

(2) Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $\exists$ τα όρια $f(x^+)=\lim_{t\to0^+}f(x+t)$, $f(x^-)=\lim_{t\to0^+}f(x-t)$

τότε: αν η $\boxed{\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\frac{dt}{t}<+\infty}$ (1) ικανοποιείται

για κάποιο $\alpha\in\mathbb{C}$, αναγκαστικά ισχύει $\alpha=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ και, άρα, $S_n(f,x)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο x και η (1) ικανοποιείται για κάποιο $\alpha\in\mathbb{C}$ τότε $\alpha=f(x)$, άρα $S_n(f,x)\to f(x)$

↳ Απόδειξη: Αν $\alpha\neq\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ και $\varepsilon=\left|\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}-\alpha\right|>0$

τότε: $\exists\delta>0$, ώστε: αν $0<t<\delta \Longrightarrow \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow \int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-\alpha\right|\frac{dt}{t}\geq\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta}\frac{dt}{t}=+\infty$

Δηλαδή, δεν ικανοποιείται η (1), άτοπο.

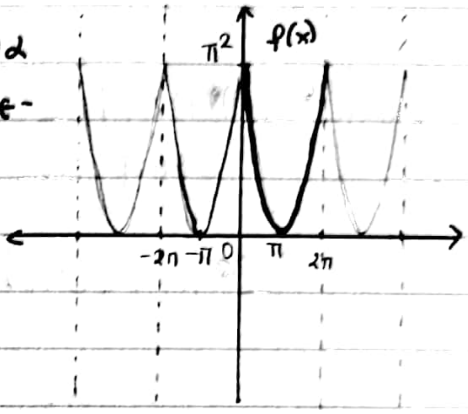
(3) **Αρχή τοπικότητας του Riemann:** Αν $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ και $x\in\mathbb{T}$, ώστε $f\equiv g$ στο $(x-\delta,x+\delta)$, για κάποιο $\delta>0$, τότε:
$S_n(f,x)$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow S_n(g,x)$ συγκλίνει και μάλιστα:

$S_n(f,x)-S_n(g,x)\xrightarrow{n\to\infty}0$

Ασκήσεις (Κεφ. 5)

(6) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\pi-x)^2$ στο $[0,2\pi]$ και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$.
Δ.ό. η σειρά Fourier της f, $S(f,x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ και από αυτό δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Λύση: • Η επέκταση της f στο $\mathbb{R}$ είναι άρτια. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier a_k, b_k ως ολ/ματα στο $[-\pi,\pi]$



• $\forall k\in\mathbb{N}$: • $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cdot\sin(kx)}_{\text{άρτια}\cdot\text{περιττή}\ \ \text{περιττή}}dx=0$

• $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\overset{f\ \text{άρτια}}{=}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-(\pi-x)^3}{3}\right]_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-\pi)^3}{3}+\frac{(\pi-0)^3}{3}\right]=\frac{2\pi^{\cancel{3}}}{\cancel{\pi}3}=\frac{2\pi^2}{3}$

• $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos(kx)}_{\text{άρτια}\cdot\text{άρτια}=\text{άρτια}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos(kx)dx$
$k\geq 1$

$=\frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{(\pi-x)^2\sin(kx)}{k}}\right]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-2(\pi-x)\frac{\sin(kx)}{k}dx$

0

$=\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin(kx)dx=\frac{4}{k\pi}\left[-(\pi-x)\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}-\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi}-\frac{\cos(kx)}{k}dx$

$=\frac{4}{k\pi}\left(0+\frac{\pi\cdot\cos 0}{k}\right)+\frac{4}{\pi k^2}\int_0^{\pi}\cos(kx)dx$

$=\frac{4}{k^2}+\frac{4}{\pi k^2}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi}$

0

$=\frac{4}{k^2}+\frac{4}{\pi k^2}\left(\cancel{\frac{\sin(k\pi)}{k}-\frac{\sin 0}{k}}\right)$

$=\frac{4}{k^2}$

• Άρα: $S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\cos(kx)=\frac{2\pi^2}{2\cdot 3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos(kx)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$

Η $S(f,x)$ συγκλίνει απόλυτα. Μάλιστα $\frac{|\alpha_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| = \frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty$ και, αφού f συνεχής είναι $f(x) \overset{\text{ομ.}}{=} S(f,x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (για την επέκταση)

Οπότε για $x\in[0,2\pi]$: $f(x) = S(f,x) \Longleftrightarrow$
$$(\pi-x)^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}$$

Για $x=0$: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{k^2} \Longleftrightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Λήμμα: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|<+\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|+|b_k|)<+\infty$

↳ Απόδειξη: • "$\Leftarrow$" Γνωρίζουμε ότι $\hat{f}(k) = \frac{\alpha_k - ib_k}{2}$

$\Longrightarrow |\hat{f}(k)| \le \frac{|\alpha_k|+|b_k|}{2}$, $\forall k>0$ και $|\hat{f}(k)| \le \frac{|\alpha_{-k}|+|b_{-k}|}{2}$, $\forall k<0$

Άρα: $\sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_k|+|b_k|)+\frac{|\alpha_0|}{2} <+\infty$

• "$\Longrightarrow$": $|\alpha_k| = |\hat{f}(k)+\hat{f}(-k)| \le |\hat{f}(k)|+|\hat{f}(-k)| \Rightarrow$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k| \le \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|<+\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|<+\infty$$

Όμοια: $|b_k| = |\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)| \le |\hat{f}(k)|+|\hat{f}(-k)| \rightarrow$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k| \le \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(k)|<+\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<+\infty$$

(7) Έστω $0<\alpha\le 1$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική. Υποθέτουμε ότι $\exists M>0$ τ.ω. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $|f(x)-f(y)|\le M\cdot|x-y|^{\alpha}$ (συνθήκη Hölder τάξης a)
Δ.ό.: $\exists c>0$: $\forall k\ge 1$ $|\alpha_k|\le\frac{c}{k^{\alpha}}$, $|b_k|\le\frac{c}{k^{\alpha}}$

Λύση: • $\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx \underset{y=x+\frac{\pi}{k}}{=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}}f(y-\tfrac{\pi}{k})\cos(ky-\pi)\,dy$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}}\underbrace{f(y-\tfrac{\pi}{k})\cdot(-\cos(ky))}_{2\pi\text{-περιοδική} \Rightarrow \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}}dy = \int_{-\pi}^{\pi}dy}dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y-\tfrac{\pi}{k})\cos(ky)\,dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-\tfrac{\pi}{k})\cos(kx)\,dx \Longrightarrow \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f(x-\tfrac{\pi}{k})\right)\cos(kx)\,dx$$

$$\Rightarrow |\alpha_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{k}\right)\right| \cdot |\cos(kx)|\, dx$$

$$\overset{\text{υποθ.}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M \cdot \left(x - x + \frac{\pi}{k}\right)^{\alpha} \cdot 1\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M \cdot \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha} dx = \frac{1}{\cancel{2\pi}} M \cdot \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\alpha} \cdot \cancel{2\pi} = \frac{M\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}}$$

Θέτουμε: $c = M\pi^{\alpha}$ και άρα: $|\alpha_k| \leq \frac{c}{k^{\alpha}}$

Ομοίως βρίσκουμε $|b_k| \leq \frac{c}{k^{\alpha}}$