10/2/23

Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Παρατήρηση: Θέλουμε να ορίσουμε το "μήκος" ή "όγκο" ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ ή $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\lambda(A)$, με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\forall \alpha < b \quad \lambda((a,b)) = b-a$

(ii) $\forall A \subseteq \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda(A+x) = \lambda(A)$

(iii) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, να είναι $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$

(iv) $\lambda(A) \in [0,+\infty], \ \forall A \subseteq \mathbb{R}$.

Αυτό <u>δε γίνεται</u>: $\nexists \lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ που να ικανοποιεί τα (i)-(iv)

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

• Στο $\mathbb{R}$: $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$.

Αν θεωρήσουμε την οικογένεια ανοικτών διαστημάτων (α,b), $\alpha \le b$, αυτή είναι μια σ-κάλυψη του $\mathbb{R}$, αφού: $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$

$\Rightarrow \forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \le b_n$ και $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_n, b_n)$

Ορίζουμε $\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \right\}$

• Το λ^* έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\lambda^*((\alpha,b)) = b-\alpha$

(ii) $\lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$

(iii) Αν $A \subseteq B \rightarrow \lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$

(iv) $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$, $\forall A_n \subseteq \mathbb{R}$

(v) Αν το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο, τότε $\lambda^*(A) = 0$

• Στον $\mathbb{R}^d$: Τον ρόλο διαστημάτων έχουν ορθογώνια $I = (\alpha_1, b_1) \times \dots \times (\alpha_d, b_d)$, $\alpha_i \le b_i$, $\forall i$.

Τότε $v(I) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - \alpha_i)$ ο όγκος του διαστήματος και $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε:

$$\boxed{\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ διαστήματα} \right\}}$$

Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός: (Καραθεοδωρή) Ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται μετρήσιμο αν $\forall X \subseteq \mathbb{R}^d$:
$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c)$

Παρατηρήσεις: (1) Η $\leq$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του λ^*.
Άρα, αρκεί νδο $\geq$
(2) Μάλιστα, αρκεί να θεωρήσουμε τα σύνολα X με $\lambda^*(X) < +\infty$.

Θεώρημα: Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων $\mathcal{M}$ είναι μεγάλη:
(i) Περιέχει όλα τα διαστήματα ($\emptyset \in \mathcal{M}$)
(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$
(iii) $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$
(iv) $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$
(v) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$ και $A \triangle B \in \mathcal{M}$
(vi) $\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

Θεώρημα: Η $\lambda^* : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ικανοποιεί την αριθμήσιμη προσθετικότητα:

Αν $A_n \in \mathcal{M}$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ και $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

Ορισμός: Η απεικόνιση $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ με $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$ είναι το μέτρο Lebesgue

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue.

Ορισμός: Έστω $\Omega \neq \emptyset$. Μια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται σ-άλγεβρα αν:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$.

A) • Η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^d$ (η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$) είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}^d$.

• Κάθε ανοικτό G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών ορθογωνίων $\Rightarrow G \in \mathcal{M}$.

• $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}$, δηλαδή κάθε Borel σύνολο είναι μετρήσιμο.

Β) Συνέχεια του μέτρου:

(i) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{M}$ και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $\lambda(A_n) \longrightarrow \lambda(A)$

(ii) Αν $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{M}$ και $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ με $\lambda(B_1) < +\infty$, τότε $\lambda(B_n) \longrightarrow \lambda(B)$

Παράδειγμα: $B_n = [n, +\infty)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, $\lambda(B_n) = +\infty \longrightarrow \lambda(B) = 0$

Γ) Περιγραφή μετρήσιμων συνόλων

Πρόταση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) A μετρήσιμο

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G \supseteq A$ ανοικτό, με $\lambda^*(G \setminus A) = \varepsilon$

(iii) $\exists G_\delta$-σύνολο $H \supseteq A$ με $\lambda^*(H \setminus A) = 0$, δηλαδή $A = H \setminus N$, όπου $\lambda(N) = 0$

Αντίστοιχη πρόταση ισχύει "από μέσα":

(ii') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \subseteq A$ κλειστό με $\lambda^*(A \setminus F) = \varepsilon$

(iii') $\exists F_\sigma$-σύνολο $K \subseteq A$ με $\lambda^*(A \setminus K) = 0$, δηλ.

Δ) Ιδιότητες κανονικότητας

(1) Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές $\Longrightarrow \lambda(K) < +\infty$

(2) $\forall A \in \mathcal{M}$, $\lambda(A) = \inf\{\lambda(G) : G$ ανοικτό, $A \subseteq G\}$

(3) $\forall A \in \mathcal{M}$, $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq A\}$

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται μετρήσιμη, αν $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό $f^{-1}(G) \in \mathcal{M}$.

Παρατήρηση: Συνήθως δίνουμε τον ορισμό: $\forall b \in \mathbb{R}$ $f^{-1}((b, +\infty)) = \{x \in A : f(x) > b\} \in \mathcal{M}$

Παράδειγμα: (1) Συνεχείς συναρτήσεις είναι μετρήσιμες

(2) $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$ μετρήσιμη $\Longleftrightarrow A\in\mathcal{M}$

(3) Η συνάρτηση Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι μετρήσιμη, γιατί $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}$ αλλά είναι παντού ασυνεχής

Ιδιότητες:

1) Αν f, g μετρήσιμες, $\alpha, b\in\mathbb{R}$ τότε οι: $\alpha\cdot f + b\cdot g$, $f\cdot g$, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ είναι μετρήσιμες

2) Αν $f_n: A\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες, τότε οι $\sup f_n$, $\inf f_n$ μετρήσιμες

$\hookrightarrow \{x\in A: \sup f_n > b\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\in A: f_n(x) > b\} \in\mathcal{M}$

$\Rightarrow \limsup f_n$, $\liminf f_n$ μετρήσιμες, αφού:

$\limsup f_n = \inf_n (\sup_{k\geq n} f_k)$, $\liminf f_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} f_k)$

3) Αν $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f \Rightarrow f$ μετρήσιμη, γιατί $f = \limsup f_n = \liminf f_n$.

15/2/23

Ορισμός: Απλή μετρήσιμη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ της μορφής $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i\cdot\chi_{E_i}$, $E_i\in\mathcal{M}$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,m$

Παρατήρηση: Το σύνολο τιμών της φ είναι πεπερασμένο. Αν γράψουμε $\varphi(\mathbb{R}^d) = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ και $A_s = \{\varphi = t_s\}$ έχουμε:

$\varphi = \sum_{s=1}^{k} t_s \chi_{A_s}$, και τα A_s είναι ξένα ανά δύο (κανονική αναπαράσταση της φ)

Θεώρημα: Έστω $A\in\mathcal{M}$, $f: A\to\mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Τότε, $\exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων, ώστε $\varphi_n(x)\uparrow f(x)$, $\forall x\in A$. Επιπλέον, αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο $B\in\mathcal{M}$ με $B\subseteq A$, τότε $\varphi_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο B.

$\hookrightarrow$ Απόδειξη: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε το $[0, 2^n]$ και το χωρίζουμε σε διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$, τα:

$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, $k=0,1,\dots,2^n-1$

· Ορίζουμε $B_{n,k} = \{x\in A : \frac{k}{2^n} \le f(x) \le \frac{k+1}{2^n}\}$, $k=0,1,\dots,2^n-1$

και $C_n = \{x\in A : f(x) \ge 2^n\}$

· Τότε $\boxed{A = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} (B_{n,k} \cap C_n)}$

Ορίζουμε $\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}} + 2^n \cdot \chi_{C_n}$

Τότε, η φ_n είναι απλή μετρήσιμη σε κανονική μορφή, $\forall n$

· <u>$\forall x\in A : \varphi_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$</u>:

Αν $f(x) < \cancel{+}\infty$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < 2^{n_0}$ και $\forall n \ge n_0 \Rightarrow$ $2^n \ge 2^{n_0} > f(x)$

Έστω $n\ge n_0$. Τότε για $k\in\{0,1,\dots,2^n-1\}$: $x\in B_{n,k}$ και τότε $f(x)-\varphi_n(x) = f(x) - \frac{k}{2} < \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

· <u>$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα</u>: Έστω $x\in A$, $n\in\mathbb{N}$.
$\hookrightarrow = \bigcup (B_{n,k}\cap C_n)$

(i) Αν υπάρχει $k\in\{0,1,\dots,2^n-1\}$ τ.ω. $x\in B_{n,k}$, τότε $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$

Στο επόμενο βήμα το $B_{n,k}$ χωρίζεται σε 2 μέρη:

$$B_{n,k} = \left\{\frac{k}{2^n} < f < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{2k}{2^{n+1}} \le f < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}} \le f < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\}$$

$$= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}$$

Έτσι, $\varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$, αν $x\in B_{n+1,2k}$

και $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \varphi_n(x)$, αν $x\in B_{n+1,2k+1}$

Άρα, σε κάθε περίπτωση $\forall x\in B_{n,k}$: $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}$

(ii) Για $x\in C_n$, τότε πάλι $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$ διότι:

$x \in C_n \Rightarrow f(x) > 2^n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n$

Αν $x \in C_{n+1}$, τότε $\varphi_{n+1} = 2^{n+1} > 2^n = \varphi_n$

Αν $x \notin C_{n+1}$, τότε $x \in B_{n+1,k}$, για κάποιο $k \in \{0,1,\dots,2^{n+2}-1\}$

Όμως, $2^{n+1} > f(x) > 2^n \xRightarrow{\cdot 2^{n+1}} 2^{2n+2} > 2^{n+1} \cdot f(x) > 2^{2n+1}$

$\Rightarrow \exists k \in \{2^{2n+1}+1, \dots, 2^{2n+2}-1\}$, ώστε: $\frac{k}{2^{n+1}} < f(x) < \frac{k+1}{2^{n+1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{k=2^{2n+1}+1}^{2^{2n+2}-1} B_{n+1,k} \Rightarrow \varphi_{n+1}(x) \geq \frac{2^{2n+1}+1}{2^{n+1}} = \frac{2^{2n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} > \underset{=\varphi_n(x)}{2^n}$

$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x) > \varphi_n(x)$.

- Τέλος, η φ_n είναι μετρήσιμη, διότι f μετρήσιμη.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω A μετρήσιμο και $f: A \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη. Γράφουμε $f = f^+ - f^-$ ($f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = -\min\{0, f\}$)

↳ <u>Απόδειξη</u>: Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχαν απλές $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ με $0 \leq \psi_n \uparrow f^+$ και $0 \leq \zeta_n \uparrow f^-$

Ορίζουμε $\varphi_n = \psi_n - \zeta_n$, οι οποίες είναι απλές μετρήσιμες και $\varphi_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

Επίσης: $0 \leq |\varphi_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\}$?
$\leq \max\{\psi_{n+1}, \zeta_{n+1}\}$
$= |\varphi_{n+1}| \Rightarrow |\varphi_n| \uparrow |f|$

- $\varphi_n = \psi_n - \zeta_n \leq \psi_n \leq \max\{\psi_n, \zeta_n\}$
- $-\varphi_n = \zeta_n - \psi_n \leq \zeta_n \leq \max\{\psi_n, \zeta_n\}$

$\Rightarrow |\varphi_n| \leq \max\{\psi_n, \zeta_n\}$
$\geq$?

Πρόταση: f μετρήσιμη $\Leftrightarrow \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ απλές μετρήσιμες, ώστε $\varphi_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

Ολοκλήρωμα Lebesgue

Θέλουμε να ορίσουμε το $\int f \, d\lambda$ για όσο το δυνατόν περισσότερες μετρήσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$, ώστε:

(i) $\int_A \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$, $A \in \mathcal{M}$

(ii) $\int (t \cdot f + s \cdot g) \, d\lambda = t \cdot \int f \, d\lambda + s \cdot \int g \, d\lambda$

(iii) $f \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\lambda \geq 0$ $(\rightsquigarrow f \leq g \Rightarrow \int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda)$

(iv) Καλή συμπεριφορά ως προς συγκλίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων.

Ο ορισμός του ολ. Lebesgue γίνεται σε 3 στάδια
(1) για απλές μετρήσιμες με φορέα πεπερασμένου μέτρου
(2) για μη αρνητικές μετρήσιμες
(3) για γενικές μετρήσιμες f, αφού $f = f^+ - f^-$.

(1) Έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{E_i}$, E_i ξένα, μετρήσιμα, $\lambda(E_i) < +\infty$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε $\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda(\chi_{E_i})$
Δείχνουμε μονοτονία, γραμμικότητα, θετικότητα κ.λ.π.

(2) Για $f \geq 0$ μετρήσιμη ορίζουμε:
$$\int f \, d\lambda = \sup \left\{ \int \varphi \, d\lambda : \varphi \text{ απλή μετρήσιμη με } 0 \leq \varphi < f \right\}$$

Αν E μετρήσιμο ορίζουμε $\int_E f \, d\lambda = \int f \cdot \chi_E \, d\lambda$.

• Αν $f : E \to [0, +\infty]$, θεωρούμε την $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ με:
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ και ορίζουμε $\int_E f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f} \, d\lambda$

• Ιδιότητες:
- $f \geq 0$, $t \geq 0 \Rightarrow \int t \cdot f \, d\lambda = t \cdot \int f \, d\lambda$
- $f \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\lambda \geq 0$
- $f \geq g \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\lambda \geq \int g \, d\lambda$
- $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\lambda = 0$
- $E \subseteq F \Rightarrow \int_E f \, d\lambda \leq \int_F f \, d\lambda$ (διότι $f \cdot \chi_E \leq f \cdot \chi_F$)
- (Markov) $\forall a > 0 : \int f \, d\lambda \geq a \cdot \lambda(\{f \geq a\})$

↳ Απόδειξη Markov:

$$\int f\,d\lambda \geq \int_{\{f\geq a\}} f\,d\lambda = \int f\cdot \chi_{\{f\geq a\}}\,d\lambda \overset{f\geq a}{\geq} \int a\cdot \chi_{\{f\geq a\}}\,d\lambda = a\cdot \lambda(\{f\geq a\})$$

Πρόταση: Αν $\int f\,d\lambda < +\infty$, τότε $f(x) < +\infty$, σχεδόν παντού.

↳ Απόδειξη: $\lambda(\{f=+\infty\}) \leq \lambda(\{f\geq \frac{1}{n}\}) \overset{Markov}{\leq} \frac{1}{n}\underbrace{\int f\,d\lambda}_{<+\infty} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Longrightarrow \lambda(\{f=+\infty\}) = 0$

Παρατήρηση: $\int (f+g)\,d\lambda \overset{?}{=} \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$

Τότε, θα είχαμε: αν E_1, E_2 μετρήσιμα, ξένα $\Rightarrow \int_{E_1\cup E_2} f\,d\lambda = \int_{E_1} f\,d\lambda + \int_{E_2} f\,d\lambda$

↳ Απόδειξη: $\int_{E_1\cup E_2} f\,d\lambda = \int f\cdot \chi_{E_1\cup E_2}\,d\lambda = \int f(\chi_{E_1}+\chi_{E_2})\,d\lambda =$

$= \int (f\chi_{E_1} + f\cdot\chi_{E_2})\,d\lambda = \int f\cdot \chi_{E_1}\,d\lambda + \int f\cdot\chi_{E_2}\,d\lambda = \int_{E_1} f\,d\lambda + \int_{E_2} f\,d\lambda$.

Θεώρημα (Μονότονης Σύγκλισης / Θ.Μ.Σ.) Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα, $f_n\geq 0$ μετρήσιμες. Τότε, $\int (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\int f\,d\lambda\right)$

Παρατήρηση: Αν δείξουμε το Θ.Μ.Σ. έχουμε την προσθετικότητα

↳ Απόδειξη: $\exists\ 0\leq \varphi_n \uparrow f$, $0\leq \psi_n\uparrow g$, φ_n, ψ_n απλές μετρήσιμες.

Από Θ.Μ.Σ.: $\int \varphi_n\,d\lambda \longrightarrow \int f\,d\lambda$ και $\int \psi_n\,d\lambda \longrightarrow \int g\,d\lambda$, άρα:
$\int (\varphi_n+\psi_n)\,d\lambda \longrightarrow \int (f+g)\,d\lambda$

γραμμικότητα για απλές μετρήσιμες

Επίσης, $\int (\varphi_n+\psi_n)\,d\lambda = \int \varphi_n\,d\lambda + \int \psi_n\,d\lambda \longrightarrow \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$

Άρα $\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$ (μοναδικότητα ορίου)

17/2/23

Θεώρημα (Μονότονης Σύγκλισης) (Θ.Μ.Σ.) Αν (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n, τότε ορίζεται η $\underset{\text{μετρήσιμη}}{f = \lim f_n}$ και $\int f_n d\lambda \longrightarrow \int f d\lambda$.

Λήμμα Fatou: Αν $f_n \geq 0$ μετρήσιμες τότε:
$\int \liminf(f_n) d\lambda = \liminf_{n\to+\infty} (\int f_n d\lambda)$

Θεώρημα (Beppo Levi) Αν $f_n \geq 0$ μετρήσιμες, τότε: $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\lambda$

Πόρισμα: Αν $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$, ξένα ανά δύο και $f \geq 0$, τότε:
$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\lambda$$

Ορισμός: Έστω $f \geq 0$ μετρήσιμη ($f: \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$) Ορίζουμε $\varphi_f : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ ως εξής: $\varphi_f(E) = \int_E f d\lambda$.
Τότε, η φ_f είναι μέτρο και καλείται αόριστο ολοκλήρωμα της f.

Παρατήρηση: Από το παραπάνω Πόρισμα $\varphi_f(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_f(E_n)$. Τότε, για $f \equiv 1$, το φ_f είναι το μέτρο Lebesgue.

(III) Έστω $f: \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Ξέρουμε ότι $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, όπου $f^+ = \max\{f, 0\} \geq 0$ $f^- = -\min\{f, 0\} \geq 0$, για τις οποίες έχουμε ορίσει τα $\int f^+ d\lambda$, $\int f^- d\mu$

Ορισμός: Λέμε ότι το $\int f d\lambda$ ορίζεται αν κάποιο απ' τα $\int f^+ d\lambda$, $\int f^- d\lambda$ είναι πεπερασμένο και ορίζουμε: $\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$

Παρατήρηση: 1) f ολοκληρώσιμη $\iff$ $|f|$ ολοκληρώσιμη (διότι $|f| = f^+ + f^-$)

2) Αν $f \geq 0$ είναι $f = f^+$ και άρα ο νέος ορισμός δίνει το ίδιο ολοκλήρωμα που δίνει ο ορισμός στην περίπτωση II)

3) Αν f ολοκληρώσιμη, τότε $|\int f d\lambda| = |\int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda|$
$\leq |\int f^+ d\lambda| + |\int f^- d\lambda| \overset{f^+, f^- \geq 0}{=} \int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda$
$= \int |f| d\lambda$

Πρόταση (Γραμμικότητα Ολοκληρώματος) Αν f, g ολοκληρώσιμες, $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $t \cdot f + s \cdot g$ ολοκληρώσιμη και $\int (t \cdot f + s \cdot g) d\lambda = t \int f d\lambda + s \int g d\lambda$.

Θεώρημα (Κυριαρχημένης σύγκλισης) (Θ.Κ.Σ.) Έστω $f_n \xrightarrow{\sigma.\pi.} f$. Υποθέτουμε ότι $\exists g \geq 0$ ολοκληρώσιμη ώστε $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$ σ.π.
Τότε, f_n, f ολοκληρώσιμες και $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$

Πόρισμα (Φραγμένη Σύγκλιση) Έστω $E \in \mathcal{M}$ με $\lambda(E) < +\infty$, $f_n : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, ώστε $f_n \to f$. Υποθέτουμε ότι $\exists M > 0 : |f_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Τότε $\int_E f_n d\lambda \to \int_E f d\lambda$

Σύγκριση ολοκληρώματος Riemann - ολοκληρώματος Lebesgue.

Θεώρημα: Αν $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι και Lebesgue-ολοκληρώσιμη και μάλιστα:
$(R)\int_\alpha^b f(x)dx = (L)\int_{[\alpha, b]} f \, d\lambda$.

Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue

Έστω $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι η $F : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$. Τότε:

(1) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$, τότε υπάρχει η $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [\alpha, b]$

Δηλαδή: $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Δηλαδή: $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \xrightarrow{h \to 0^+} f(x)$

Δηλαδή: $\frac{1}{\ell(I)}\int_I f(t)dt \xrightarrow[x \in I]{\ell(I) \to 0} f(x)$

(2) Αν η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ και η F' ολοκληρώσιμη, τότε $F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x F'(t)dt$.

Θεώρημα (Παραγώγισης του Lebesgue) Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Τότε σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\in B \\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) = f(x)} \quad (1)$$

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: αν B ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει το x και $\lambda(B) < \delta$ τότε $\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) \right| < \varepsilon$.

Παρατήρηση: Αν f συνεχής στο x, τότε η (1) έπεται.

↳ Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, από τη συνέχεια της f στο x.
$\exists r > 0$: αν $|y-x| < r$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θέτουμε $\delta = \lambda(B(0, \frac{r}{2}))$

θα ήθελα $r(B) < \frac{r}{2}$
$\Rightarrow \lambda(B) = \omega_d \cdot r(B)^d < \omega_d \left(\frac{r}{2}\right)^d = \delta$

Έστω B ανοικτή μπάλα με $x \in B$ και $\lambda(B) < \delta$ $(\Leftrightarrow \omega_d \cdot r(B)^d < \delta)$
Τότε $r(B) < \frac{r}{2}$ (ακτίνα της μπάλας)
Οπότε, $\forall y \in B$ έχω: $x, y \in B \Rightarrow |x-y| \le 2r(B) < r$
$\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Άρα: $\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(x)\, d\lambda(y) \right|$

$$\le \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \le \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \varepsilon \cdot d\lambda(y) = \frac{1}{\lambda(B)} \cdot \varepsilon \cdot \lambda(B) = \varepsilon$$

Μεγιστική Συνάρτηση των Hardy-Littlewood.

Ορισμός: Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Ορίζουμε $f^* : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ με

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)|\, d\lambda(y)$$ B μπάλα

Πρόταση: (Ιδιότητες της f^*)
(i) Η f^* είναι μετρήσιμη
(ii) $\forall \alpha > 0$ $\lambda(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}}_{E_\alpha}) \le \frac{3^d}{\alpha} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f|\, d\lambda}^{\|f\|_1}$

(iii) $f^*(x) < +\infty$ σ.π.

↳ <u>Απόδειξη</u>: (i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ είναι ανοικτό.

Έστω $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ και $x \in E_\alpha$.
Αφού $f^*(x) = \sup\limits_{x \in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)| d\lambda(y) > \alpha$ έχουμε ότι

$\exists$ ανοικτή μπάλα B: $x \in B$ και $\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)| d\lambda(y) > \alpha$

Έστω $z \in B$, τότε $f^*(z) \geq \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) > \alpha \Longrightarrow f^*(z) > \alpha \Longrightarrow z \in E_\alpha$.
Έτσι $B \subseteq E_\alpha$ και $x \in B$.
Άρα E_α ανοικτό σύνολο, συνεπώς f^* μετρήσιμη (και μάλιστα Borel-μετρήσιμη)

(iii) $\forall \alpha > 0$: $\{x : f^*(x) = +\infty\} \subseteq \{x : f^*(x) > \alpha\} \Longrightarrow$

$$\lambda(\{x : f^*(x) = +\infty\}) \leq \lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^d}{\alpha} \int |f| d\lambda \xrightarrow{\alpha \to +\infty} 0$$

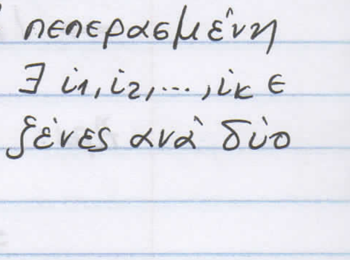
$$\Longrightarrow \lambda(\{x : f^*(x) = +\infty\}) = 0$$

Δηλαδή $f^*(x) < +\infty$, σχεδόν παντού.

Λήμμα (κάλυψης Vitali): Έστω $\{B_1, B_2, \dots B_N\}$ πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $\exists\, i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, ώστε οι $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και $\lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) = 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j})$

↳ <u>Απόδειξη</u>: • Επιλέγουμε ως B_{i_1} μια από τις μπάλες με τη μέγιστη ακτίνα.
• Αφαιρούμε τη B_{i_1} και όλες τις B_{i_l} για τις οποίες $B_{i_l} \cap B_{i_1} \neq \emptyset$. (δηλαδή όσες τέμνουν την B_{i_1}) και συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες.
• Από αυτές, επιλέγουμε ως B_{i_2} μία με μέγιστη ακτίνα.
• Αφαιρούμε τη B_{i_2} και όλες όσες την τέμνουν κ.ο.κ.
• Η διαδικασία ολοκληρώνεται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, έστω k-βήματα, άρα έχω μπάλες $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$.

<u>Ισχυρισμός</u>: Αν $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ και $r(B_1) \geq r(B_2)$
Τότε $B_2 \subseteq B_1^*$, όπου B_1^* μπάλα ίδιου κέντρου με τη B_1 και ακτίνας $3 \cdot r(B_1)$



Έστω x το κέντρο της B_1, y το κέντρο της B_2, $z_0 \in B_1 \cap B_2$.

Τότε: $\forall z \in B_2$ έχουμε $|z-x| \leq |z-y| + |y-z_0| + |z_0 - x| \leq$

$$\leq r(B_2) + r(B_2) + r(B_1)$$

$$\leq r(B_1) + r(B_1) + r(B_1) = 3 \cdot r(B_1)$$ ✓

Ισχύει ότι $\bigcup_{i=1}^{N} B_l \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}^*$:

↳ Αν πάρω μια B_l τότε:

- είτε $B_l = B_{i_{j_0}}$ για κάποιο j_0
- είτε η B_l αφαιρέθηκε κατά την επιλογή μιας άλλης B_{i_j}. Τότε, όμως $r(B_l) \leq r(B_{i_{j_0}}) \Longrightarrow B_l \subseteq B_{i_{j_0}}^*$ (ισχυρισμός)

Έτσι, προκύπτει ότι $\lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}^*\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}^*)$

$$= \sum_{j=1}^{k} 3^d \lambda(B_{i_j})$$

22/2/23

↳ <u>Απόδειξη Ιδιότητας (ii)</u>: Έστω $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$

Ν.δ.ο $\forall K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$ ισχύει ότι $\lambda(K) \leq \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1$

Έστω συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$. Τότε, $\forall x \in K$ έχουμε $f^*(x) > \alpha \Longrightarrow$ $\exists B_x$ ανοικτή μπάλα: $x \in B_x$ και $\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y) > \alpha \Longleftrightarrow$

$\lambda(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| \, d\lambda(y)$

Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_x$ και K συμπαγές, άρα $\exists x_1, x_2, \dots, x_N \in K$, ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i}$

Εφαρμόζουμε το λήμμα του Vitali για την οικογένεια $\{B_{x_1}, B_{x_2}, \dots, B_{x_N}\}$ και βρίσκουμε $i_1, i_2, \dots, i_k$ ώστε $B_{x_{i_j}}$ να είναι ξένες και

$\lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_{x_l}\right) \leq 3^d \cdot \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}}) \Longrightarrow \lambda(K) \leq \lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_{x_l}\right) \leq 3^d \cdot \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}})$

$\leq 3^d \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\alpha} \int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)| \, d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)| \, d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)| \, d\lambda(y)$

$\leq \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \, dy = \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1$

Θεώρημα: Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Τότε, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχής με συμπαγή φορέα, ώστε $\int |f-g|\, d\lambda < \varepsilon \iff \|f-g\|_1 < \varepsilon$.

↳ <u>Απόδειξη Θεωρήματος Παραγώγισης Lebesgue:</u>

Ορίζουμε $\forall \alpha > 0$ $F_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup\limits_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$

$$\boxed{\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} g(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \le \delta}} g(x) \right)}$$

• Δ.δ.ο $\lambda(F_\alpha) = 0$, $\forall \alpha > 0$.
Αν το δείξουμε αυτό θα έχουμε ότι $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}\right) = 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$ (δηλ. σχεδόν παντού) θα είναι: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| \le \frac{2}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \implies$$

$$\lim_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| = 0 \iff \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) \xrightarrow[\lambda(B) \to 0]{x \in B} f(x)$$

• Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, από προηγούμενο Θεώρημα μπορούμε να βρούμε $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχή με $\int |f-g|\, d\lambda < \varepsilon$.

Τότε, $\forall B$ μπάλα του $\mathbb{R}^d$ με $x \in B$ έχουμε ότι:

$$\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f\, d\lambda - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\lambda(B)} \left(\int_B (f-g)\, d\lambda + \int_B g\, d\lambda - g + (g-f) \right) \right| \implies$$

$$\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f\, d\lambda - f(x) \right| \le \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f-g|\, d\lambda + \underbrace{\lim_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B g\, d\lambda - g \right|}_{0\ (g\ \text{συνεχής})} + |g-f|$$

$$= (f-g)^*(x) + |g(x) - f(x)|$$

• Άρα $\lambda(F_\alpha) \le \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : (f-g)^*(x) > \alpha\}\right) + \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x) - f(x)| > \alpha\}\right)$

διότι: $F_\alpha \subseteq \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \cup \{x : |g(x) - f(x)| > \alpha\}$

$$\xRightarrow{\text{Markov}} \lambda(F_\alpha) \le \frac{3^d}{\alpha} \|f-g\|_1 + \frac{1}{\alpha} \|f-g\|_1 = \frac{3^d+1}{\alpha} \|f-g\|_1 < \frac{3^d+1}{\alpha} \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0 \implies \forall \alpha > 0 \text{ είναι } \lambda(F_\alpha) = 0$$

Παρατήρηση: Μια Lebesgue-ολοκληρώσιμη συνάρτηση μπορεί να έχει "πολύ λίγα" σημεία συνέχειας. Παρ' όλα αυτά, σχεδόν $\forall x: \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) \xrightarrow{B\downarrow x} f(x)$

Ορισμός: (i) Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη αν η $f\cdot\chi_B \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ $\forall B \subseteq \mathbb{R}^d$ μπάλα.
Συμβολίζουμε $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

(ii) Έστω $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ και $x\in\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το x είναι σημείο Lebesgue της f αν $|f(x)|<+\infty$ και $\lim\limits_{\substack{x\in B\\ \lambda(B)\to 0}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|d\lambda(y) = 0$

Παρατήρηση: Αν x σημείο Lebesgue, τότε $\lim\limits_{B\downarrow x}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x)$

↳ Αποδ.: $\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B (f(y)-f(x))d\lambda\right|$

$\leq \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|d\lambda(y) \xrightarrow[\substack{x \text{ σημείο}\\ \text{Lebesgue}}]{B\downarrow x} 0$

Ορισμός: Το σύνολο των σημείων Lebesgue της f συμβολίζουμε $Leb(f)$

Θεώρημα: $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus Leb(f)) = 0$, όπου $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
Δηλαδή, σχεδόν όλα τα x είναι σημεία Lebesgue της f.

Συμβολισμός: $⨍_B f\,d\lambda = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y)$

Πρόταση: Έστω $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Τότε, σχεδόν $\forall x\in\mathbb{R}^d$ είναι $\lim\limits_{B\downarrow x} ⨍_B f\,d\lambda = f(x)$

↳ Απόδειξη: Θεωρούμε $k\in\mathbb{N}$ και $B_k = B(0,k)$. Θδο σχεδόν $\forall x\in B_k$ ισχύει: $\lim\limits_{B\downarrow x} ⨍ f\,d\lambda = f(x)$. Αφού $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ έπεται ότι $f\cdot\chi_{B_k}\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$
Άρα, σχεδόν $\forall x\in\mathbb{R}^d$, και συνεπώς σχεδόν $\forall x\in B_k$ ισχύει $\lim\limits_{B\downarrow x} ⨍ f\cdot\chi_{B_k}\,d\lambda = f(x)$ (*)

Για B με αρκετά μικρή ακτίνα: $x\in B \Rightarrow B\subseteq B_k \Rightarrow f\cdot\chi_{B_k} = f$ στη B
Άρα, για μικρές μπάλες B έχουμε $⨍_B f\cdot\chi_{B_k}\,d\lambda = ⨍_B f\,d\lambda \Longrightarrow$
$\lim\limits_{B\downarrow x} ⨍_B f\,d\lambda = \lim\limits_{B\downarrow x} ⨍_B f\cdot\chi_{B_k}\,d\lambda = f(x)\cdot\chi_{B_k}(x) = f(x)$.

Έπεται ότι $\forall k \geq 1$ $\exists Z_k \subseteq B_k$ με $\lambda(Z_k) = 0$, ώστε να ισχύει η $(*)$ για κάθε $x \in B_k \setminus Z_k$.

• Ορίζουμε $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$. Τότε $\lambda(Z) = 0$ και η $(*)$ ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$, $\exists k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B(0,k) = B_k$, $x \notin Z_k$
Άρα $x \in B_k \setminus Z_k$, οπότε $\lim_{B \downarrow x} \fint_B f(y)dy = f(x)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $x \in Leb(f)$ τότε $\fint_B f \, d\lambda \xrightarrow{B \downarrow x} f(x)$

Θεώρημα: (ξανά) Έστω $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Τότε, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$ είναι σημείο Lebesgue της f. Δηλαδή: $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus Leb(f)) = 0$.

↳ <u>Απόδειξη</u>: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ η συνάρτηση $|f(x) - q|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.
Πράγματι, $\forall B$ μπάλα $\int_B |f(x)-q| \, d\lambda(x) \leq \int_B |f(x)| d\lambda(x) + \int_B |q| \, d\lambda$
$= \int_B |f(x)| d\lambda(x) + |q| \cdot \lambda(B) < +\infty$.

• Άρα, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\lim_{B \downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q| \, d\lambda(y) = |f(x) - q|$ $(**)$

• Επειδή $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο $\forall q \in \mathbb{Q}$ $\exists Z_q \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(Z_n) = 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z_q$ να ισχύει η $(**)$.

Θέτω $Z = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} Z_q$ και έχω $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$ ότι $\lim_{B \downarrow x} \fint_B |f(y) - q| \, d\lambda(y)$
$= |f(x) - q|$, $\forall q \in \mathbb{Q}$ και $\lambda(Z) = 0$.

Επίσης, αφού $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ έχω ότι $\exists N \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(N) = 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ να ισχύει $|f(x)| < +\infty$.
ΘΔΟ $\mathbb{R}^d \setminus (Z \cup N) \subseteq Leb(f)$
Δηλαδή $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus Leb(f)) \leq \lambda(Z \cup N) = 0$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in \mathbb{R}^d \setminus (Z \cup N)$. Τότε $|f(x)| < +\infty$, άρα $\exists q_0 \in \mathbb{Q}$ με $|f(x) - q_0| < \varepsilon$.

Επίσης, αν $x \in B$ $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) \leq ⨍_B |f(y)-q_0|\,d\lambda(y) +$
$|f(x)-q_0| \xrightarrow[B\downarrow x]{} |f(x)-q_0| \leq 2|f(x)-q_0| \leq 2\varepsilon$

$\Longrightarrow 0 \leq \limsup\limits_{B\downarrow x} ⨍_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) \leq 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{B\downarrow x} ⨍_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) = 0$, δηλαδή $x \in Leb(f)$

24/2/23

Παρατηρ.: (1) Γνωρίζουμε ότι μια $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκλ/μη $\Longleftrightarrow$ Σχεδόν $\forall x\in[\alpha,b]$ είναι σημείο συνέχειας.

(2) Αν $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $x\in\mathbb{R}^d$, τότε $x\in Leb(f)$

↳ Αποδ.: Έστω $\varepsilon>0$. Ζητώ $\delta_1>0$: αν B μπάλα στον $\mathbb{R}^d$ και $x\in B$ με $\lambda(B)<\delta_1$, τότε: $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) < \varepsilon$

Αφού f συνεχής στο x, για το ε αυτό, υπάρχει δ ώστε αν $y\in B(x,\delta)$ να είναι $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Αν $B=B(z,r_B)$ μπάλα με $x\in B$ και $\lambda(B)<\lambda(B(0,\frac{\delta}{2}))$, τότε $r_B<\frac{\delta}{2}$ και άρα αν $y\in B(z,r_B)$ τότε:
$d(x,y)\leq 2r_B = \delta$

$\boxed{\lambda(B(x,\delta)) = \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda(B(0,1))}}{\omega_d}\cdot\delta^d}$

$\xrightarrow{\text{από συνέχεια}} \forall y\in B(z,r_B)=B$ είναι $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Άρα για B μπάλα, $x\in B$ και $\lambda(B)<\lambda(B(0,\frac{\delta}{2}))$, έχω
$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,d\lambda(y) < \frac{1}{\lambda(B)}\int_B \varepsilon\, d\lambda(y) = \frac{\varepsilon}{\cancel{\lambda(B)}}\cancel{\int_B d\lambda(y)} = \varepsilon \Rightarrow x\in Leb(f)$

(3) Αν $f\in\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$, τότε σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{R}^d$ είναι σημείο Lebesgue της f

(4) $Leb(f)$ τα "καλά σημεία" της f.

Άσκηση: Δ.ό. αν $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lim\limits_{Q \downarrow x} \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f(y)\, d\lambda(y) = f(x)$, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$.
όπου Q κύβος του $\mathbb{R}^d$ με $x \in Q$ και $\lambda(Q) \to 0$.

$\boxed{\bullet\, Q(0,1) = B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) = \mathrm{conv}\{\pm e_i,\ i=1,\dots,d\}}$

$\boxed{\bullet\, Q(y,r) = y + r\,Q(0,1)}$

$\boxed{\bullet\, \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{d}\cdot\|x\|_\infty}$

<u>Λύση:</u> • Αν Q κύβος με $x \in Q \Longrightarrow$
$\exists B$ μπάλα με $Q \subseteq B$ και
$\lambda(B) \le \sqrt{d}^{\,d} \cdot \lambda(Q)$:

Αν $Q = Q(y,r) = B_{\|\cdot\|_\infty}(y,r)$, τότε:

$$Q = y + r\cdot B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) \subseteq y + r\sqrt{d}\cdot B_{\|\cdot\|_2}(0,1) = B(y, r\sqrt{d})$$

$\cancel{\lambda(Q) \le \lambda(B(y, r\sqrt{d}))}$

Οπότε $\lambda\big(B(y, r\sqrt{d})\big) = (\sqrt{d})^d \cdot \lambda(B(r))$

$$\le (\sqrt{d})^d\, \lambda(Q(r)) \Rightarrow \frac{1}{\lambda(Q)} \le (\sqrt{d})^d \cdot \frac{1}{\lambda(B)}$$

$\Longrightarrow$ Όταν $Q \downarrow x$ έχω ότι $B \downarrow x$. Άρα:

$$\frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \le \frac{d^{d/2}}{\lambda(B(r))} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \Longrightarrow$$

$$\limsup_{Q \downarrow x} \fint_Q |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \le d^{d/2} \limsup_{B \downarrow x} \fint_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0$$

σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$
(αφού $x \in Leb(f)$)

Σημεία πυκνότητας μετρήσιμων συνόλων

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο με $\lambda(E) > 0$.
Θεωρούμε την $\chi_E \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (αν B μπάλα, τότε $\int_B \chi_E\, dy = \lambda(E \cap B) \le \lambda(B) < +\infty$)

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Παραγώγισης Lebesgue.

1. Σχεδόν $\forall x \in E$: $\frac{1}{\lambda(B)} \int_B \chi_E\, d\lambda \xrightarrow{B \downarrow x} \chi_E(x) \Rightarrow \frac{\lambda(E \cap B)}{\lambda(B)} \xrightarrow{B \downarrow x} 1$

Τα σημεία $x \in E$ για τα οποία ισχύει $\frac{\lambda(E \cap B)}{\lambda(B)} \xrightarrow{B \downarrow x} 1$ λέγονται <u>σημεία πυκνότητας</u> του E.

2. Σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E : \dfrac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} \xrightarrow{B \downarrow x} 0$

Χώροι L^p

Ορισμός: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $p\in[1,+\infty)$
Ορίζουμε $\mathcal{L}^p(E)$ την κλάση όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f: E \longrightarrow [-\infty,+\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ με $\int_E |f|^p < +\infty$
Τότε $|f|^p < +\infty$ σχεδόν παντού
Άρα $|f| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Παρατήρηση: Αν $f,g\in \mathcal{L}^p(E)$ και $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $(f+g)$ και $(\alpha\cdot f)\in\mathcal{L}^p(E)$
Δηλαδή, ο $\mathcal{L}^p(E)$ είναι διανυσματικός χώρος.

↳ <u>Απόδειξη:</u> • $\int_E |\alpha\cdot f|^p d\lambda = \int_E |\alpha|^p\cdot|f|^p d\lambda = |\alpha|^p \int_E |f|^p < +\infty$

• $\int_E |f+g|^p d\lambda \le 2^p\left(\int_E |f|^p d\lambda + \int_E |g|^p d\lambda\right) < +\infty$,

διότι: $|f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p \le 2^p \cdot \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\}$
$\le 2^p\cdot(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$

• Ορίζουμε στο $\mathcal{L}^p(E)$ την σχέση ισοδυναμίας:
$f\sim g \iff f=g$ σχεδόν παντού στο E.

Συμβολίζουμε με $[f]$ την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει η f, δηλαδή: $[f] = \{g\in\mathcal{L}^p(E) : f=g \text{ σ.π. στο } E\}$

Θεωρούμε τον $L^p(E) = \mathcal{L}^p(E)/_\sim$ = το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς $\sim$.

Ορίζουμε πράξεις:
• $[f]+[g] = [f+g]$, $\forall f,g\in\mathcal{L}^p(E)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
• $\alpha[f] = [\alpha\cdot f]$

Ορισμός: Για κάθε $[f]\in\mathcal{L}^p(E)$ ορίζουμε $\|[f]\|_p = \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$

Θεώρημα: Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(E)$

↳ Απόδειξη: (i) $\|[f]\|_p \geq 0$ προφανώς και $\|[f]\|_p = 0 \Leftrightarrow f=0$ σ.π. $\Leftrightarrow [f]=0$.

Πράγματι, $\|[f]\|_p = 0 \Rightarrow \int_E |f|^p d\lambda = 0 \Rightarrow |f|^p = 0$ σ.π.
$\Rightarrow f = 0$ σ.π. $\Rightarrow [f] = [0]$
Προφανώς, αν $[f]=[0]$ τότε $\|[f]\|_p = \|[0]\|_p = 0$

(ii) $\|\alpha\cdot[f]\|_p = \|[\alpha\cdot f]\|_p = \left(\int_E |\alpha\cdot f|^p d\lambda\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$
$= |\alpha|\cdot\|[f]\|_p$

(iii) $\|[f]+[g]\|_p = \|[f+g]\|_p \overset{(!!)}{\leq} \|[f]\|_p + \|[g]\|_p$

Παρατήρηση: Στο εξής θα γράφουμε f αντί για $[f]$ για τα στοιχεία του $L^p(E)$.

Η τριγωνική ανισότητα του (iii) δεν είναι προφανής.
$\forall f,g \in L^p(E)$ ισχύει $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (ανισότητα Minkowski)

η οποία αποδεικνύεται μέσω της Hölder: Αν $p>1$ και $q>1$ ο συζυγής εκθέτης, δηλ. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε:
$\forall f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$ ισχύει ότι $f\cdot g \in L^1(E)$ και $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$
$\Rightarrow \int_E |f\cdot g|\, d\lambda \leq \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1/p}\cdot\left(\int_E |g|^q d\lambda\right)^{1/q}$

Θεώρημα (Riesz-Fisher) Ο $L^p(E)$, $1\leq p<+\infty$ είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγει η νόρμα $\|\cdot\|_p$.
Δηλαδή, ο χώρος με νόρμα $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

Ορισμός: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στο X, όπου $x_k \in X, \forall k \in \mathbb{N}$, αν $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$
Δηλαδή: $\|x - s_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα αν $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| < +\infty$

Λήμμα: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε: ο X είναι πλήρης $\iff$ κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα.

↳ <u>Απόδειξη</u>: ($\Longrightarrow$): Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \underset{\text{πλήρης}}{X}$ τω: $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > m \geq n_0$ να είναι $\sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$

Τότε, $\forall n > m \geq n_0$ είναι $\|s_n - s_m\| = \|(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 + x_2 + \dots + x_m)\|$
$= \|(\cancel{x_1} + \cancel{x_2} + \dots + x_m + x_{m+1} + \dots + x_n) - (\cancel{x_1} + \cancel{x_2} + \dots + \cancel{x_m})\|$
$= \|x_{m+1} + \dots + x_n\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$.

Άρα, η $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, και καθώς ο X είναι πλήρης έπεται ότι $\exists x \in X$, ώστε $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, δηλ. η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει.

1/3/23

Λήμμα: → <u>Απόδειξη</u>: ($\Longleftarrow$): Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον X. Θδο η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, και άρα θα συγκλίνει (αφού είναι Cauchy).

Από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας για $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ βρίσκω $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$, ώστε $\forall m, s \geq k_n$ να είναι $\|x_m - x_s\| < \frac{1}{2^n}$.

Ειδικότερα, $k_{n+1}, k_n \geq k_n$ άρα $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$

Έτσι, αν θέσουμε $y_n = x_{k_{n+1}} - x_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:
$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\| < +\infty \xrightarrow{\text{υπόθεση}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνει στον X (αφού κάθε απολύτως συγκλίνουσα είναι συγκλίνουσα)

Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = x \in X$. Τότε: $\sum_{k=1}^{N} y_k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τηλεσκοπικό άθροισμα}}}{x_{k_N} - x_1} \xrightarrow[\|\cdot\|]{N \to \infty} x \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x_{k_{N+1}} \xrightarrow[\|\cdot\|]{N \to +\infty} x + x_1 \in X$

Δηλαδή, η (x_{k_n}) είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n), οπότε (x_n) συγκλίνουσα. Άρα, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης.

Θεώρημα (Riesz-Fisher) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $1 \leq p < +\infty$. Ο
(ξανά)
$(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης ($L^p(E)$ χώρος Banach)

↳ Απόδειξη: • Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $L^p(E)$, ώστε:
$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < +\infty$.

• Ορίζουμε $g_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ και έχουμε $g_N \uparrow g$

• Παρατηρούμε ότι αν $N \in \mathbb{N}$, τότε $\|g_N\|_p = \| |f_1| + |f_2| + \dots + |f_N| \|_p \leq$
$\leq \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < +\infty$

$\Longrightarrow \int_E |g_N|^p d\lambda \leq M^p, \ \forall N \in \mathbb{N}$

• Από Θ.Μ.Σ. (αφού $g_N \geq 0$ και $g_N \uparrow g$) έχουμε:
$\int_E |g|^p d\lambda = \lim_{N \to +\infty} \int_E |g_N|^p d\lambda \leq M^p < +\infty$

$\Longrightarrow g \in L^p(E) \Longrightarrow |g| < +\infty$ σχεδόν παντού

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$, σχεδόν $\forall x \in E$.

• Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, σχεδόν $\forall x \in E$.
Ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ και θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$

Μένει νδο $f \in L^p(E)$ και $\|s_n - f\|_p \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \iff \int_E |s_n(x) - f(x)|^p d\lambda(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

• Γνωρίζουμε $s_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ σ.π. στο E
Επίσης $|s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p \leq (2\max\{|s_n|, |f|\})^p$
$= 2^p \cdot \max\{|s_n|^p, |f|^p\}$
$\leq 2^p \cdot (|s_n|^p + |f|^p)$

Όμως: $|s_n| = |f_1 + f_2 + \dots + f_n| \leq |f_1| + |f_2| + \dots + |f_n| = g_n \leq g$ και
$|f| = \lim_{n \to +\infty} |s_n| \leq g$, διότι $s_n(x) \longrightarrow f(x)$ σ.π. στο E

Άρα $|s_n-f|^p \le 2^p\cdot(g^p+g^p) = 2^p\cdot(2g^p) = 2^{p+1}\cdot g^p$

Όμως $\int_E 2^{p+1}\cdot g^p \le 2^{p+1}\cdot M^p < +\infty$

• Συνολικά, λοιπόν, έχουμε: $|s_n-f|^p \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$ σ.π. και
$0 \le |s_n-f|^p \le 2^{p+1}\cdot g^p \in L^1(E)$
Οπότε, από Θ.Κ.Σ. έχουμε $\int_E |s_n-f|^p \xrightarrow{n\to\infty} 0$, δηλ. $\|s_n-f\|_p \to 0$

• Συνεπώς, ο $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης

Ο χώρος $L^\infty(E)$

Ορισμός: Έστω $f: E \to [-\infty,+\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη για την οποία $\exists b \ge 0$ ώστε: $\lambda(\{x\in E : |f(x)|>b\}) = 0$ (δηλ. $|f(x)|\le b$ σ.π.)
Τότε, η f λέγεται ουσιωδώς φραγμένη.

Θέτουμε $b_0 = \inf\{b\ge 0 : \lambda(\{x\in E : |f(x)|>b\})=0\}$

<u>Παρατήρηση:</u> Το παραπάνω infimum είναι minimum.
Παίρνω $b_n \downarrow b_0$: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\lambda(\underbrace{\{x\in E : |f(x)|>b_n\}}_{Z_n}) = 0$

Ορίζουμε $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ και έχουμε ότι $\lambda(Z)=0$ και ότι αν $x\in E\setminus Z$, τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f(x)|\le b_n \Longrightarrow |f(x)| \le \lim_{n\to+\infty} b_n = b_0$

Άρα ~~.....~~ $b_0 = \min\{b\ge 0 : \lambda(\{|f|>b\}) = 0\}$

Ορίζουμε $\|f\|_\infty = b_0$. Ισχύει ότι $|f(x)|\le b_0$ σχεδόν παντού.
Δηλαδή $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ σχεδόν παντού.

Ο $L^\infty(E)$ είναι ο χώρος των ουσιωδώς φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f: E\to\overline{\mathbb{R}}$, και γίνεται χώρος με νόρμα αν θεωρήσουμε την $\|\cdot\|_\infty$
Μάλιστα, ο $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach (πλήρης).

Προσέγγιση στον $L^p(E)$

- Με απλές μετρήσιμες
- Με συνεχείς που έχουν συμπαγή φορέα

- Ορίζουμε S την κλάση όλων των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{E_j}$, όπου $E_j \subseteq E$ ξένα, και αν $\alpha_j \neq 0$ τότε $\lambda(E_j) < +\infty$.

Αν $\varphi \in S$, τότε $\forall p \geq 1$ $\int_E |\varphi|^p d\lambda = \int_E \left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{E_j}\right|^p d\lambda = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^p \lambda(E_j)}_{<+\infty}$

Άρα $S \subseteq L^p$, $\forall p \geq 1$. Μάλιστα, $S \subseteq L^\infty(E)$.

Θεώρημα: Για κάθε $p \geq 1$ και κάθε $f \in L^p(E)$ υπάρχει ακολουθία $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην S ώστε $\|f - \varphi_n\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

↳ Απόδειξη: • Αρχικά, παίρνουμε $f \geq 0$ με $\int_E f^p d\lambda < +\infty$. Τότε, υπάρχουν απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, ώστε $\varphi_n \nearrow f$. Πρώτα δδο $\varphi_n \in L^p$.

- Αφού $\int \varphi_n{}^p d\lambda = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{j_n} \cdot \lambda(E_{j,n}) \leq \int f^p d\lambda < +\infty$ έχουμε $\varphi_n \in L^p$ $\forall n$ και $\lambda(E_{j,n}) < +\infty$, αν $\alpha_{j,n} \neq 0$. Έτσι $\varphi \in S$

- $0 \leq |f - \varphi_n|^p = (f - \varphi_n)^p \leq f^p \in L^1(E)$ και $|f - \varphi_n|^p \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$

Άρα, από Θ.Κ.Σ. παίρνουμε $\int |f - \varphi_n|^p \longrightarrow 0$, δηλ. $\|f - \varphi_n\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

- Αν f δεν είναι απαραίτητα ≥ 0, τότε μπορεί να γραφεί ως $f = f^+ - f^-$

Έχουμε: $\int_E |f|^p d\lambda = \int_E |f^+ - f^-|^p d\lambda = \int_E |f^+|^p d\lambda + \int_E |f^-|^p d\lambda \overset{f^+, f^- \geq 0}{=}$
$\int_E (f^+)^p d\lambda + \int_E (f^-)^p d\lambda < +\infty$ (διότι αν $f^+ > 0$, τότε $f^- = 0$ κ.π.)
$\longrightarrow f^+, f^- \in L^p(E)$.

Έτσι, μπορούμε να βρούμε απλές μετρήσιμες $\varphi_n, \psi_n \in S$, ώστε $\|f^- - \varphi_n\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ και $\|g - \psi_n\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Τότε: $\|f - (\varphi_n - \psi_n)\|_p = \|f^+ - f^- - \phi_n + \psi_n\|_p = \|(f^+ - \varphi_n) - (f^- - \psi_n)\|_p$
$\leq \|f^+ - \varphi_n\|_p + \|f^- - \psi_n\|_p \xrightarrow{n\to+\infty} 0 + 0 = 0$

και $(\varphi_n - \psi_n) \in S$ (άσκηση)

Θεώρημα: $\forall p \geq 1$ και $\forall f \in L^p(E)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (συνεχής με συμπαγή φορέα), ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Ορισμός: Φορέας μιας συνάρτησης g είναι το σύνολο $\overline{\{x \in E : g(x) \neq 0\}}$ και $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ αν η g είναι συνεχής και ο φορέας της είναι συμπαγές σύνολο.

Παρατήρηση: $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, τότε $g \in L^p$, $\forall p \geq 1$

↳ Απόδειξη Θεωρήματος:

Βήμα 1: • Έστω $f \in L^p(E)$, $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \varphi \in S$ με $\|f - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$
Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ με $\|\varphi - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$

Βήμα 2: • Η φ γράφεται ως $\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \chi_{E_j}$, όπου $E_j \subseteq E$ ξένα, μετρήσιμα, με $\lambda(E_j) < +\infty$ και $\alpha_j \neq 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

• Αν προσεγγίσω την χ_{E_j} με $g_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$, ώστε: $|\alpha_j| \cdot \|\chi_{E_j} - g_j\|_p < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m}$, τότε για $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot g_j$ είναι:

$$\|\varphi - g\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \chi_{E_j} - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot g_j \right\|_p = \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\chi_{E_j} - g_j) \right\|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m} \|\alpha_j (\chi_{E_j} - g_j)\|_p = |\alpha_j| \cdot \sum_{j=1}^{m} \|\chi_{E_j} - g_j\|_p$$
$$< \frac{\varepsilon}{2m} \cdot m = \frac{\varepsilon}{2}$$, και φυσικά $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$

Βήμα 3: Έστω F μετρήσιμο και φραγμένο, $\varepsilon > 0$ και $\delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$

• Τότε $\exists K \subseteq F$ συμπαγές με $\lambda(F \setminus K) < \delta$ και
$\exists U \supseteq F$ ανοικτό με $\lambda(U \setminus F) < \delta$

(*)

• Μπορώ να υποθέσω ότι U φραγμένο, διότι F φραγμένο.
Τότε, το $\overline{U}$ είναι συμπαγές σύνολο.

Από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει g συνεχής, ώστε:
$g \equiv 1$ στο K και $g \equiv 0$ στο U^c και $0 \leq g \leq 1$.
Τότε: $\int |\chi_F - g|^p d\lambda = \int_{U \setminus K} |\chi_F - g|^p d\lambda \leq \lambda(U \setminus K)$
$= \lambda(U \setminus F) + \lambda(F \setminus K)$
$< 2 \cdot \delta$

10/3/23

(*) U φραγμένο: Υπάρχουν ανοικτά ορθογώνια στον $\mathbb{R}^d$, έστω $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, ώστε $I_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = U$ $(\lambda(I_n) \uparrow \lambda(U))$

Επιλέγω n_0 αρκετά μεγάλο, ώστε $F \subseteq I_{n_0}$ (αυτό γίνεται, διότι το F είναι φραγμένο) (και $\lambda(U \setminus I_{n_0}) < \frac{\delta}{2}$)
Έτσι $\lambda(I_{n_0} \setminus F) \leq \lambda(U \setminus F) < \delta$

Τότε, παίρνω για U το I_{n_0} και συνεχίζω.

↳ Συνέχεια Απόδειξης: Έχω $\int |\chi_F - g|^p d\lambda < 2 \cdot \delta$
Επιλέγω $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p > 0$

Τότε είναι $\int |\chi_F - g|^p d\lambda < 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \Longrightarrow$

$$\|\chi_F - g\|_p \leq 2^{1/p} \frac{\varepsilon}{4} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο, μη φραγμένο με $\lambda(E) < +\infty$ και $\varepsilon > 0$
Τότε: $\exists K \subseteq E$ συμπαγές, ώστε: $\lambda(E \setminus K) < \delta^p$, και $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$
ώστε: $\|\chi_K - g\|_p < \delta$

Τότε $\|\chi_E - g\|_p = \|\chi_E - \chi_K + \chi_K - g\|_p \le \|\overbrace{\chi_E - \chi_K}^{\chi_{E\setminus K}}\|_p + \|\chi_K - g\|_p$

$$= (\lambda(E\setminus K))^{1/p} + \delta$$
$$< (\delta^p)^{1/p} + \delta$$
$$< 2\delta$$

Επιλέγω $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, οπότε $\|\chi_E - g\|_p < 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$

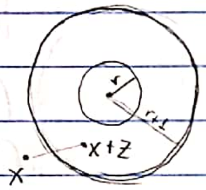
Ορισμός: Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < +\infty$. Ορίζουμε για $z \in \mathbb{R}^d$ $\tau_z f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ με $\tau_z f(x) = f(x+z)$.

Θεώρημα: Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lim\limits_{|z|\to 0} \|\tau_z f - f\|_p = 0$

↳ Απόδειξη: • Υποθέτουμε, αρχικά, ότι $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Τότε $\exists r > 0$ τ.ώ.: αν $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le r\}$, τότε $g(x) = 0$, $\forall x \in B_r^c$.

Επίσης, g ομοιόμορφα συνεχής, άρα για τυχόν $\varepsilon > 0$ $\exists \delta \in (0,1)$ τ.ώ.: αν $|u - v| < \delta$, τότε $|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(B_{r+1})^{1/p}}$

Αν $x \notin B_{r+1}$ και $|z| < \delta < 1$, τότε $x+z, x \notin B_r$
$(|x+z| \ge |x| - |z| > (r+1) - 1 = r \Rightarrow |x+z| > r)$



Άρα $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x+z) - g(x)|^p d\lambda(x) = \int_{B_{r+1}} |g(x+z) - g(x)|^p dx$

Όμως για $|z| < \delta$ έχω: $\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_z g(x) - g(x)|^p dx \le \frac{\varepsilon^p}{\cancel{\lambda(B_{r+1})}} \cdot \cancel{\lambda(B_{r+1})} = \varepsilon^p$

$$\Longrightarrow \|\tau_z g(x) - g(x)\|_p \le \varepsilon \Rightarrow \|\tau_z g - g\|_p \xrightarrow{|z|\to 0} 0$$

• Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d) : \|f - g\|_p < \varepsilon$ (από προηγούμενο θεώρημα) και για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ είναι:

$$\|\tau_z f - f\|_p = \|\tau_z f - \tau_z g + \tau_z g - g + g - f\|_p$$
$$\le \|\tau_z f - \tau_z g\|_p + \|\tau_z g - g\|_p + \|g - f\|_p$$

Συνεπώς: $\limsup\limits_{|z|\to 0} \|\tau_z f - f\|_p \le \limsup\limits_{|z|\to 0} \|\tau_z f - \tau_z g\|_p + \overbrace{\limsup\limits_{|z|\to 0} \|\tau_z g - g\|_p}^{=0}$
$+ \limsup\limits_{|z|\to 0} \|g - f\|_p$

• Συνεπώς:

$$\limsup_{|z|\to 0}\|\tau_z f - f\|_p \le \limsup_{|z|\to 0}\|\underbrace{\tau_z f - \tau_z g}_{\tau_z(f-g)}\|_p + \underbrace{\limsup_{|z|\to 0}\|\tau_z g - g\|_p}_{=0} + \limsup_{|z|\to 0}\|g-f\|_p$$

$$\overset{(*)}{=} 2\cdot\|f-g\|_p < 2\cdot\varepsilon$$

Και αφού $\varepsilon>0$ τυχόν, έχω ότι $\limsup_{|z|\to 0}\|\tau_z f - f\|_p = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\tau_z f - f\|_p \xrightarrow{|z|\to 0} 0$

• $\|\tau_z f - \tau_z g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z)-g(x+z)|^p dx \underset{u=x+z}{\overset{(*)}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)-g(u)|^p du = \|f-g\|_p^p$

<u>Δικαιολόγηση της (*)</u>: Αν $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, τότε $\forall z\in\mathbb{R}^d$ η $\tau_z f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_z f\, d\lambda$

Το ελέγχουμε για χ_E με $\lambda(E)<+\infty$.
Έχουμε ότι $\tau_z\chi_E(x) = \chi_E(x+z) = \chi_{E\setminus z}(x)$
και $\int \chi_E d\lambda = \lambda(E) = \lambda(E\setminus z) = \int \underbrace{\chi_{E\setminus z}(x)}_{\tau_z\chi_E} d\lambda(x)$

Το ίδιο ισχύει για ολοκληρώσιμες απλές $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$, από γραμμικότητα ολοκληρώματος.

Για $f\ge 0$ αποδεικνύεται από Θ.Μ.Σ. $(\varphi_n \uparrow f)$
Για $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ αποδεικνύεται διότι $f = f^+ - f^-$

Θεώρημα (Fubini) Έστω $d=k+m$. Γράφουμε $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m$ και τα $z\in\mathbb{R}^d$ ως $z=(x,y)$ με $x\in\mathbb{R}^k$, $y\in\mathbb{R}^m$.
(i) Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε:
• $f_x:\mathbb{R}^m\to\overline{\mathbb{R}}$ με $f_x(y) = f(x,y)$

• $f^y:\mathbb{R}^k\to\overline{\mathbb{R}}$ με $f^y(x) = f(x,y)$

Τότε, σχεδόν $\forall x\in\mathbb{R}^k$, $f_x\in L^1(\mathbb{R}^m)$ και η συνάρτηση $x\longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x(y)\, d\lambda_m(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^k$ και

$$\int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\, d\lambda_m(y)\right) d\lambda_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, d\lambda_d$$

Όμοια για την $f^y(x)$.

(ii) (Θ. Tonelli) Έστω $f: \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη. Τότε, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^k$ η f_x είναι μετρήσιμη, η $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, d\lambda_m$ είναι επίσης μετρήσιμη και:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) \, d\lambda_m(y) \right) d\lambda_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y) \, d\lambda_d$$

<u>Παρατήρηση:</u> Στην πράξη μας δίναν την f και εφαρμόζοντας το (ii) δείχνουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και μετά η f θα είναι ολοκληρώσιμη, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε Fubini για την f.

<u>Συνέλιξη Συναρτήσεων.</u>

Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^{2d} \to \overline{\mathbb{R}}$ με $u(x,y) = f(x-y) \cdot g(y)$.
Δείχνουμε ότι η u είναι μετρήσιμη.

<u>Παρατήρηση:</u> Η u είναι ολοκληρώσιμη:
Θεωρούμε την $|u|$. Από Θ. Tonelli έχω ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |u| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot \underbrace{|g(y)|}_{\text{ανεξάρτητο του } x} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-y} |f| \, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|f\|_1 \, dy$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty.$$

Από Θ. Fubini, σχεδόν $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists$ το $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) \, dy$, οπότε ορίζουμε:
$f * g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ με $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) \, dy$

Επίσης, η $f*g$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^d$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(x) \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \, dx \right)}_{\int_{\mathbb{R}^d} \tau_{-y} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \, dx} dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \left(\int f(x) \, dx \right) dy$$

Τελικά, $f*g$ ολοκληρώσιμη και ονομάζεται συνέλιξη των f, g.

Πρόταση: (Ιδιότητες συνέλιξης)

(i) $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

(ii) $(f+g)*h = f*h + g*h$ (διγραμμικότητα)
και $f*(g+h) = f*g + f*h$

(iii) Αν $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, $g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g$ τότε: $f_k * g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f*g$ (συνέχεια)

(iv) $f*g = g*f$ (αντιμεταθετικότητα)

(v) $f*(g*h) = (f*g)*h$ (προσεταιριστική)

15/3/23

↳ Απόδειξη: (i) $\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,dy \right| dx$

$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \, \|f\|_1 \,dy = \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

(ii) $(f+g)*h = \int_{\mathbb{R}^d} (f+g)(x-y)\cdot h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) + g(x-y))\,h(y)\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot h(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) h(y)\,dy$

$= (f*h) + (g*h)$

Ομοίως $f*(g+h) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot (g+h)(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) h(y)\,dy$

$= (f*g) + (f*h)$

(iii) $\left. \begin{array}{l} f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \\ g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \|f_k - f\|_1 \to 0 \\ \|g_k - g\|_1 \to 0 \end{array} \right\}$

Άρα: $\|(f_k*g_k)-(f*g)\|_1 = \|(f_k*g_k)+(f_k*g)-(f_k*g)-(f*g)\|_1$

$$= \|f_k*(g_k-g)+(f_k-f)*g\|_1$$

$$\leq \|f_k*(g_k-g)\|_1 + \|(f_k-f)*g\|_1$$

$$\overset{(i)}{\leq} \|f_k\|_1 \cdot \underbrace{\|g_k-g\|_1}_{\downarrow 0} + \underbrace{\|f_k-f\|_1}_{\downarrow 0} \cdot \|g\|_1 \longrightarrow 0$$

διότι (f_k), (g_k) είναι συγκλίνουσες στον L^1, άρα φραγμένες.

(iv) $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,dy \underset{\Rightarrow y=x-z}{\overset{\text{θέτω } z=x-y}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\cdot g(x-z)\,dz = (g*f)(x)$

(v) $(f*(g*h))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot(g*h)(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)\cdot h(z)\,dz\right)dy$

$$\overset{\text{fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} h(z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y-z)\,dy\right)dz$$

$$\underset{x-y=x-u-z}{\overset{u=y-z,\ y=u+z}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} h(z)\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z-u)\cdot g(u)\,du}\right)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} h(z)(f*g)(x-z)\,dz$$

$$= ((f*g)*h)(x)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $E\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο. $\forall f\in L^p(E)$, $p>1$ ισχύει:
$\|f\|_p = \max\left\{\int_E f\cdot h : h\in L^q(E),\ \|h\|_q\leq 1\right\}$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p (δηλαδή $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

↳ <u>Απόδειξη:</u> • $\forall h\in L^q(E)$ με $\|h\|_q\leq 1$ έχουμε:
$\int_E f\cdot h \leq \left|\int_E f\cdot h\right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p\cdot\|h\|_p \leq \|f\|_p$

Άρα: $\|f\|_p \geq \sup\left\{\int_E f\cdot h : h\in L^q(E) \text{ με } \|h\|_q\leq 1\right\}$

• Αν $\|f\|_p\neq 0$ ορίζουμε $h=\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}|f(x)|^{p-1}\operatorname{sgn}(f(x))$, όπου
$$\operatorname{sgn}(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -1, & \alpha<0\end{cases}$$

Τότε: $\cdot \; \|h\|_q^q = \int_E \left(\frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\right)^q \cdot |f(x)|^{(p-1)q} dx = \int_E \frac{1}{\|f\|_p^p} |f(x)|^{(p-1)q} dx$

$$= \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_E |f(x)|^{(p-1)q} dx = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_E |f(x)|^p = 1$$

$\cdot \; \int_E f(x) \cdot h(x)\, dx = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \int_E |f(x)|^p dx = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \cdot \|f\|_p^p = \|f\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|f\|_p$

Πρόταση: Έστω E μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^d$, $1 < p < +\infty$

(i) Αν $f \in L^p(E)$ και $g \in L^1(E)$, τότε σχεδόν για κάθε x, η συνάρτηση $y \longmapsto f(x-y) \cdot g(y)$ είναι ολ/μη ως προς y, συνεπώς η $f * g$ είναι καλά ορισμένη.
Επίσης, $f * g \in L^p(E)$ και $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$

(ii) Αν $f \in L^p(E)$ και $g \in L^q(E)$, όπου q συζυγής εκθέτης του p, τότε $f*g \in L^\infty(E)$ και $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

↳ Απόδειξη: (i) Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $h \in L^q(E)$ με $\|h\|_q \leq 1$. Φράσσουμε το:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)| \cdot |h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \cdot g(y) dy\right)\right| \cdot |h(x)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy\right) \cdot |h(x)| dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |h(x)| dx\right) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(|g(y)| \cdot \underbrace{\|\tau_{-y}|f|\|_p}_{=\|f\|_p} \cdot \underbrace{\|h\|_q}_{\leq 1}\right) dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \|f\|_p \, dy = \|f\|_p \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| dy = \|f\|_p \cdot \|g\|_1,$$

Άρα, από προηγούμενη Παρατήρηση, η $(f*g) \in L^p(E)$ και $\|f*g\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1$

Επίσης: $\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy\right)^p dx < \infty$ άρα σχεδόν $\forall x$ έχουμε: $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy < \infty$, δηλαδή η $y \longmapsto f(x-y) \cdot g(y)$ ολ/μη ως προς y.

(ii) Από ανισότητα Hölder: $\forall x$ έχουμε:

$$|(f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

άρα: $\|f*g\|_\infty = \sup\{|(f*g)(x)| : x \in \mathbb{R}^d\} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Πρόταση: Η $f*g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim_{|x|\to\infty} (f*g)(x) = 0$

↳ Απόδειξη: Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ τυχόν. Βρίσκουμε $u, v \in C_c(\mathbb{R}^d)$ με $\|f-u\|_p \leq \varepsilon$ και $\|g-v\|_q \leq \varepsilon$

Τότε: $\|u*v - f*g\|_\infty = \|u*v + u*g - u*g - f*g\|_\infty$

$$= \|u*(v-g) + (u-f)*g\|_\infty$$

$$\leq \|u*(v-g)\|_\infty + \|(u-f)*g\|_\infty$$

$$\leq \|u\|_p \cdot \|v-g\|_q + \|u-f\|_p \cdot \|g\|_q$$

$$\leq (\|f\|_p + 1) \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|g\|_q$$

Επιπλέον, η $u*v$ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή $\exists M > 0$ τ.ω.: αν $|x| > M$ να ισχύει $(u*v)(x) = 0$.

Άρα, αν $|x| > M$ έχουμε:

$$|(f*g)(x)| = |(f*g)(x) - (u*v)(x)| \leq \|f*g - u*v\|_\infty \leq C \cdot \varepsilon$$

όπου $C = \|f\|_p + 1 + \|g\|_q$

Αφού το $\varepsilon \in (0,1)$ ήταν τυχόν, $\lim_{|x|\to\infty} (f*g)(x) = 0$.