2/6/23

Καθετότητα: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x, y \in X$. Λέμε ότι το x είναι κάθετο στο y (γράφουμε $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle 0$.

Πρόταση: (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Αν $x \perp y$ τότε $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

↳ Απόδειξη: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\overset{0}{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Γενικότερα: Αν $x_i \perp x_j$ $\forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $i \neq j$, τότε $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

Παρατήρηση: Για κάθε x, y $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ $(*)$
και μια νόρμα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει η $(*)$.

Θεώρημα (Βέλτιστης Προσέγγισης): Έστω H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq K \subseteq H$, K κλειστό και κυρτό. Τότε, $\forall x \in H \ \exists!\, y_0 \in K$:
$\|x-y_0\| = \mathrm{dist}(x,K) = \inf\{\|x-y\| : y \in K\}$

Ορισμός: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\emptyset \neq M \subseteq X$. Λέμε ότι ένα $x \in X$ είναι κάθετο στο M (γράφουμε $x \perp M$) αν $x \perp y$, $\forall y \in M$

Λήμμα: Έστω H χώρος Hilbert και M γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H. Τότε, $\exists z \neq 0 : z \perp M$.

Ορθοκανονικά Σύνολα

Ορισμός: Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα $\emptyset \neq A \subseteq X$ λέγεται ορθοκανονικό, αν $\forall e, e' \in A$ είναι: $\langle e, e' \rangle = 0$ και $\forall e \in A$ $\|e\| = 1$

Λήμμα: Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

↳ Απόδειξη: Έστω $e_1, e_2, \dots, e_n \in A$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$.
Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ είναι: $\langle \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, e_k \rangle = \langle 0, e_k \rangle = 0 \Rightarrow$
$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_j, e_k \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$

Ορισμός: Έστω H χώρος Hilbert. Ένα $B \subseteq H$ λέγεται ορθοκανονική βάση (δεν είναι βάση Hamel) του H αν είναι ορθοκανονικό σύνολο και $\overline{\mathrm{span}(A)} = H$

Πρόταση: Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.

↳ Απόδειξη: Υπάρχει μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο A του H (*)
Αυτό έπεται από το Λήμμα του Zorn
Αν $e_1 \neq e_2 \in A$, τότε $\|e_1 - e_2\|^2 \overset{e_1 \perp e_2}{=} \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 \overset{\|e_1\| = \|e_2\| = 1}{=} 2 \Rightarrow \|e_1 - e_2\| = \sqrt{2}$
Έτσι, οι μπάλες $B(e, \frac{\sqrt{2}}{2})$ για $e \in A$ είναι ξένες $\xrightarrow{H \text{ διαχ.}}$ A αριθμήσιμο.

(*) Δηλαδή, δεν υπάρχει A' ορθοκανονικό με $A \subsetneq A'$

Αρκεί νδο $\overline{\mathrm{span}(A)} = H$. Έστω $M = \overline{\mathrm{span}(A)}$ και έστω ότι $M \neq H$.
Από το 1ο Λήμμα: $\exists w \neq 0 : w \perp M$ ($w \in H \setminus M$). Αν $e = \frac{w}{\|w\|}$, τότε $\|e\| = 1$
και $e \perp M$. Άρα $\forall e' \in A$ είναι $\langle e, e' \rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{A \cup \{e\}}_{\supsetneq A}$ ορθοκανονικό.
Άτοπο, αφού A maximal ορθοκανονικό $\subseteq H$. ($A \subseteq \mathrm{span}(A) \subseteq M$)

Θεώρημα (Ανισότητα Bessel) Έστω X χώρος με εσ. γινόμενο και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ ορθοκανονική ακολουθία. Τότε: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ ισχύει: $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Συνεπώς, για $n \to \infty$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Θεώρημα (Χαρακτηρισμός Ορθοκανονικής Βάσης) Έστω H χώρος Hilbert και $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) Η $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H

ii) Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε $x = 0$

iii) Αν $x \in H$ τότε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} x$, δηλ. $x \overset{\|\cdot\|}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$

iv) Ταυτότητα Parseval: $\forall x \in H$ είναι $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$

↳ Απόδειξη: (i) ⇒ (ii): Έστω $x \in H$, με $\langle x, e_k \rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι: αν $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$\langle x, z \rangle = \langle x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda_k} \langle x, e_k \rangle = 0$ (*)

Τώρα, αν $w \in H = \overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}}$ έπεται ότι $\exists (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $w_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} w$. Από την (*) έχουμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $\langle x, w_n \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, w \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, w_n \rangle = 0 \Rightarrow x \perp w$, $\forall w \in H \Rightarrow x \perp x \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$

$\Rightarrow x = 0$

(ii) ⇒ (iii): Δείχνουμε, αρχικά, ότι (S_n) είναι Cauchy

Αν $m > n$ τότε: $\|S_m - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 \underset{\text{Π.Θ.}}{=} \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$

Από την ανισότητα Bessel: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m > n \geq n_0$ να είναι $\sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon \Rightarrow \|S_n - S_m\|^2 < \varepsilon$

$\Rightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy $\xrightarrow[\text{H πλήρης}]{}$ $\exists y \in H$ τ.ω. $S_n \longrightarrow y$

Θα δείξουμε ότι $x = y$, δείχνοντας ότι: $\langle x, e_k \rangle = \langle y, e_k \rangle$, $\forall k \in \mathbb{N}$, άρα από το (ii) $x - y = 0$.

Έχουμε ότι $S_n \xrightarrow{n\to\infty} y \Rightarrow \langle S_n, e_k \rangle \longrightarrow \langle y, e_k \rangle$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Για $n > k$ έχουμε $\langle S_n, e_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, e_k \rangle$

$= \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$, δηλαδή, τελικά για $n > k$: $\langle S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle$

$$\langle x-S_n,S_n\rangle=\langle x,S_n\rangle-\langle S_n,S_n\rangle=\langle x,S_n\rangle-\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle$$
$$=\langle x,S_n\rangle-\sum_{k,j=1}^{n}\langle x,e_k\rangle\cdot\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_k,e_j\rangle=\langle x,S_n\rangle-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2=\langle x,\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\rangle$$
επιβιώνει μόνο για j=k
$$=\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle x,e_k\rangle}\cdot\langle x,e_k\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2=0$$

και άρα $\langle y,e_k\rangle=\langle S_n,e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle\Rightarrow\langle y,e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle\ \forall k.$ ✓

(iii) ⇒ (iv): Γράφουμε $\|x\|^2=\|x-S_n+S_n\|^2\xRightarrow{x-S_n\perp S_n}\|x\|^2=\|x-S_n\|^2+\|S_n\|^2$
$$=\|x-S_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\xrightarrow[n\to\infty]{S_n\to x}\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2$$

(iv) ⇒ (i): Έστω ότι $M=\text{span}\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\neq H\Rightarrow\exists x\in H\ (x\neq0):x\perp M\Rightarrow$
$\langle x,e_k\rangle=0,\ \forall k\Rightarrow 0\leq\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2=0$, άτοπο.

Άρα: $M=H$

Σύγκλιση στο $L^2(\mathbb{T})$

Παρατήρηση: Ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Πρόταση: Η $\{h_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ με $h_k(x)=e^{ikx}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

↳ Απόδειξη: i) $\|h_k\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|e^{ikx}|^2}_{=1}=1\Rightarrow\|h_k\|_2=1$

ii) Αν $k\neq m$: $\langle h_k,h_m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}\cdot\overline{e^{imx}}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-m)x}\,dx=0$ (0 για $k\neq m$)

iii) Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$: $\langle f,h_k\rangle=0\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\hat{f}(k)=0\Rightarrow f=0$ σχεδόν παντού, γιατί $f\in L^2(\mathbb{T})\subseteq L^1(\mathbb{T})$ + Θεώρημα μοναδικότητας συντελεστών Fourier.

Από χαρακτηρισμό ο.κ. βάσης έχω ότι η $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ο.κ. βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

• Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$. Τότε: 1) $\forall N\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=-N}^{N}|\hat{f}(k)|^2\leq\|f\|_2^2$ (Bessel)

2) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2=\|f\|_2^2$ (Parseval)

3) $S_n=\sum_{k=-n}^{n}\langle f,h_k\rangle h_k\xrightarrow{\|\cdot\|_2}f\Rightarrow S(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}\xrightarrow{\|\cdot\|_2}f\Rightarrow$

$\Rightarrow \|f - s_n(f)\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Δηλ. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(f,x)|^2dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Θεώρημα (Riesz-Fisher): Η απεικόνιση $G: L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ με $G(f) = \{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι γραμμικός ισομετρικός ισομορφισμός

Δηλαδή, η G είναι γραμμική, 1-1, ισομετρία ($\|G(f)\|_2 = \|f\|_2$ (Parseval)) και επί (αν $(\alpha_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$): $\hat{f}(n) = \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

↳ Απόδειξη: • Γραμμική ισομετρία: άμεσο

• επί: Έστω $(\alpha_k)_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_n e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T})$ ως τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Η (s_n) είναι Cauchy: $\underset{\text{για } m>n}{\|s_n - s_m\|_2^2} = \left\|\sum_{n<|k|\leq m} \alpha_k e^{ikx}\right\|_2^2 \overset{\text{Π.Θ.}}{=}$

$\sum_{n<|k|<m} |\alpha_k|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$. Άρα, αφού $L^2(\mathbb{T})$ πλήρης, $\exists f \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$

Ισχυρισμός: $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\hat{f}(k) = \alpha_k$

Παρατηρούμε ότι $|\hat{s}_n(k) - \hat{f}(k)| \leq |\widehat{(s_n - f)}(k)| \leq \|s_n - f\|_1$ $\leq \|s_n - f\|_2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \hat{s}_n(k) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(k)$

Επίσης για $n > |k|$: $\hat{s}_n(k) = \dots = \alpha_k$ και τελικά $\hat{f}(k) = \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n(k) = \alpha_k$

Πρόταση: (Γενίκευση της Parseval) Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, τότε $\underset{\text{στον } L^2(\mathbb{T})}{<f,g>} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \underset{\text{στον } \ell^2(\mathbb{Z})}{<\hat{f}, \hat{g}>}$

Ασκήσεις (Κεφ. 7)

1) Χρησιμοποιώντας την $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$, δ.ό.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Λύση: $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \dots = \frac{\pi}{2}$

Για $k \neq 0$: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)\,dx$

$$= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Επίσης $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dots = \frac{\pi^2}{3}$ $\qquad$ $\hat{f}(k)=0$ για k άρτιο

Από ταυτότητα Parseval: $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{3} = \hat{f}(0) + 2\sum_{m=0}^{\infty} |\hat{f}(2m+1)|^2$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\left|-\frac{2}{\pi(2m+1)^2}\right|^2 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2m+1)^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^2}{12} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Τώρα: $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4} \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{96} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{96} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

5) Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$.

i) Δ.ό: $|k\hat{f}(k)| \leq c_1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

ii) Εξετάστε αν $\lim_{|k|\to\infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.

iii) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

Λύση: i, ii) $\hat{f'}(k) = ik\hat{f}(k) \Rightarrow |k\hat{f}(k)| = |\hat{f'}(k)| \xrightarrow{|k|\to\infty} 0$ αφού $f' \in C(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$ από το Λήμμα Riemann-Lebesgue

Οπότε ισχύει το (ii) και άρα έχω και το (i) ($k\hat{f}(k)$ συγκλίνουσα $\to$ φραγμένη)

iii) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0} |\hat{f}(k)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0}\left|\frac{\hat{f'}(k)}{ik}\right|$

$= |\hat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|}|\hat{f'}(k)|$

$\hat{f}' \in C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \|f'\|_2 < \infty$

$$\overset{C-S}{\Longrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{|k|^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k\neq 0}|\hat{f'}(k)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2 < +\infty$$

6) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παρ/μη 2π-περιοδική: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

Δ.ό.: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,dx$

Λύση: Ισοδύναμα (Parseval) ζητάμε: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f'}(k)|^2$

• Ισχύει $\hat{f'}(k) = ik\,\hat{f}(k) \Longrightarrow |\hat{f'}(k)| = |k|\cdot|\hat{f}(k)| \geq |\hat{f}(k)|$, για $|k|\neq 0$

$\Longrightarrow$ Για $k\neq 0$: $|\hat{f}(k)|^2 \leq |\hat{f'}(k)|^2$

• Επίσης: για $k=0$ $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, από υπόθεση.

και $\hat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi)-f(-\pi)\right)$

$= 0$, διότι f είναι 2π-περιοδική.

• Έτσι: $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f'}(k)|^2 = \|f'\|_2^2 \Longrightarrow$ ζητούμενο