Αρμονική Ανάλυση (2022–23)
6 Ιουνίου 2023

1. (1.5+1 μον.) (α) Έστω (X_1, μ_1) και (X_2, μ_2) χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\left\| \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right\|_{L^p(X_1)} \leqslant \int_{X_2} \|f(x_1, x_2)\|_{L^p(X_1)} \, d\mu_2(x_2).$$

(β) Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p = \lim_{|z|\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

2. (1.5+1 μον.) (α) Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυρήνας αθροισιμότητας και $f \in L^1(\mathbb{T})$, αποδείξτε ότι $f * K_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ στον $L^1(\mathbb{T})$.

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $n\|\sigma_n(f) - f\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στον $L^1(\mathbb{T})$ (δηλαδή, Lebesgue σχεδόν παντού).

3. (1+1.5 μον.) (α) Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε τον L^1-δείκτη συνέχειας της f ως την ποσότητα $\Omega(f, h) = \|f_h - f\|_1$, όπου $f_h : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $f_h(t) = f(t-h)$, $t \in \mathbb{T}$ και $h > 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ και $f \in L^1(\mathbb{T})$ ισχύει ότι

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right).$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\sum_{n\neq 0} \Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right)^2 < \infty$. Αποδείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $f * g \in A(\mathbb{T})$, όπου

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < +\infty \right\}.$$

(β) Αποδείξτε ότι κάθε $h \in A(\mathbb{T})$ γράφεται ως $h = f * g$ για κάποιες $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.

5. (1+1.5 μον.) (α) Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : A(\mathbb{T}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι γραμμικός τελεστής, 1-1 και επί (δηλαδή, γραμμικός ισομορφισμός).

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(n) = O(|n|^{-\ell})$ για κάποιο $\ell \geqslant \frac{3}{2}$ (δηλαδή, υπάρχει $C > 0$ ώστε $|\widehat{f}(n)| \leqslant C|n|^{-\ell}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Αποδείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνάρτηση που είναι διαφορίσιμη k φορές και $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{T})$ εφόσον $k \in \mathbb{N}$, $k < \ell - \frac{1}{2}$.

Καλή Επιτυχία!