Πυρήνας Dirichlet

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-iky} \, dy \right) e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{ik(x-y)} \, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(y) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} \right) dy . \qquad (I)$$

<u>Ορισμός</u>: Ο n-οστός πυρήνας Dirichlet είναι η συνάρτηση $D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky}$, $y \in \mathbb{T}$.

Απ' την (I) βλέπουμε ότι

$$s_n(f,x) = (D_n * f)(x) .$$

<u>Λήμμα</u>: Ισχύει ότι

$$D_n(y) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin(y/2)} \quad , \; n \geq 0 \quad , \; y \in \mathbb{T} .$$

Απόδειξη: Είναι $D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{iky} + \sum_{k=0}^{n} e^{-iky} - 1 =$$

$$= \frac{1-e^{i(n+1)y}}{1-e^{iy}} + \frac{1-e^{-i(n+1)y}}{1-e^{-iy}} - 1 \underset{\uparrow \text{ ομώνυμα}}{=}$$

$$= \frac{-e^{i(n+1)y} + e^{iny} - e^{-i(n+1)y} + e^{-iny}}{2 - e^{iy} - e^{-iy}} \underset{\uparrow \text{ οεισταί}}{=}$$

$$= \frac{\cos(ny) - \cos((n+1)y)}{1-\cos y} \underset{\uparrow \text{ τριγωνομετρικοί τύποι}}{=}$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin(y/2)} . \quad \square$$

* Ισχύει ότι $\| D_n \|_1 \sim \frac{4}{\pi^2} \ln(n) \Rightarrow$

(D_n) όχι πυρήνας αθροισιμότητας όπως θα θέλαμε. Μήπως μπορούμε να βρούμε κατάλληλο μετ/μο και να πάρουμε πυρήνα ἀθροισιμότητας;

Πυρήνας Fejer

• Ορίζουμε τον n-οστό πυρήνα του Fejer ως το τριγωνομετρικό πολ/μο

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\left(D_0(x) + \dots + D_n(x)\right)$$

(ο μέσος όρος των πρώτων n πυρήνων Dirichlet).

Παρατηρούμε ότι για $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι

$$(F_n * f)(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\left((D_0 * f)(x) + \dots + (D_n * f)(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(s_0(f,x) + \dots + s_n(f,x)\right).$$

Δηλαδή, η συνέλιξη $F_n * f$ είναι τον n-οστό Cesàro μέσο της σειράς Fourier της f. Συμβολίζουμε με $\sigma_n(f,x) =$

$$= (D_n * f)(x) = \frac{1}{n+1}\left(s_0(f,x) + \dots + s_n(f,x)\right).$$

<u>Λήμμα</u>

1) $F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$, $n = 0, 1, \ldots$

$x \in \mathbb{T}$

2) $F_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ \frac{\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \right\}^2$

Απόδειξη : Άσκηση (υπολογισμοί).

<u>Πόρισμα</u>: Ο πυρήνας Fejer (F_n) είναι πυρήνας αθροισιμότητας.

Απόδειξη : i) $\int_{\mathbb{T}} F_n(x)\, dx =$

$= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \int_{\mathbb{T}} e^{ikx}\, dx = 2\pi \Rightarrow$

$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(x)\, dx = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Είναι $F_n(x) \geq 0 \overset{i)}{\Longrightarrow}$

$\| F_n \|_1 = 1 \quad \forall n \Rightarrow \sup_n \| F_n \|_1 < +\infty$.

iii) $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi - \delta} F_n(x)\, dx =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ \frac{\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin(x/2)} \right\}^2 dx \,.$$

Για $\delta < x < 2\pi - \delta \Rightarrow \frac{\delta}{2} < \frac{x}{2} < \pi - \frac{\delta}{2}$,

είναι $\sin^2(x/2) > \sin^2(\delta/2) > 0$.

Άρα, $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi-\delta} F_n(x)\, dx \leq$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \,. \quad \square$$

5-4-23

<u>Πόρισμα</u>: Αφού (F_n) είναι πυρήνας, για $f \in L^1(\mathbb{T})$ συμπεραίνουμε ότι $\| F_n * f - f \|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ισοδύναμα, $\| \sigma_n(f) - f \|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι $\sigma_n(f, x) = (f * F_n)(x) =$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \cdot \hat{f}(k) \cdot e^{ikx}$$ (έλεγχος),

που είναι τριγωνομετρικό πολ/μο. Άρα, καταλήγουμε:

<u>Πόρισμα</u>: Τα τριγωνομετρικά πολ/μα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$.

Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολ/μα, τα $\sigma_n(f)$, που είναι τ.ω.

$$\sigma_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_1} f \quad \square$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $\hat{f}(k) = 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$ στον $L^1(\mathbb{T})$, δηλ. $f = 0$ σ.π.

Απόδειξη: Για $n \in \mathbb{N}$ είναι $\sigma_n(f, x) =$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k)\, e^{ikx} = 0 \;,\; x \in \mathbb{T}.$$

Όμως $\sigma_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \Rightarrow f = 0$ στον $L^1(\mathbb{T})$. $\square$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f = g$ στον $L^1(\mathbb{T})$.

• Δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη της αντιμεταθετικότητας της συνέλιξης:

Για $k \in \mathbb{Z}$ είναι $\widehat{(f*g)}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) = \widehat{(g*f)}(k)$. Συνεπώς, $f*g = g*f$ στον $L^1(\mathbb{T})$.

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε και την προσεταιριστικότητα.

<u>Λήμμα</u> (Riemann-Lebesgue): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f}(k) \xrightarrow{|k|\to\infty} 0$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολ/μων στον $L^1(\mathbb{T})$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει

$$p_\varepsilon(x) = \sum_{k=-n_0}^{n_0} c_k e^{ikx} \quad \text{τ.ω. } \|f - p_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Τότε, για $|k| > n_0$ είναι

$$\hat{p}_\varepsilon(k) = 0 \quad \text{και}$$

$$|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \hat{p}_\varepsilon(k)| =$$

$$= |\widehat{(f - p_\varepsilon)}(k)| \le \| f - p_\varepsilon \| < \varepsilon .$$

Άρα, $\hat{f}(k) \xrightarrow{|k| \to +\infty} 0$. □

Τώρα, δύο θεωρήματα χωρίς απόδειξη:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < +\infty$. Τότε, $K_n * f \xrightarrow{L^p} f$ για κάθε πυρήνα άθροισης (K_n).

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και (K_n) πυρήνας άθροισης. Τότε, $K_n * f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

[Πόρισμα: Τα τριγ-νομετρικά πολ/μα είναι ομοιόμορφα πυκνά στον $C(\mathbb{T})$]

↳ Για να το διαπιστώσεις, πάρε $(K_n) = (F_n)$. Ομοίως και για τον $L^p(\mathbb{T})$.

<u>Θεώρημα</u>: i) Έστω $1 \leq p < +\infty$, τότε

$$\| \sigma_n(f) - f \|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad , \; f \in L^p(\mathbb{T}).$$

ii) $\| \sigma_n(f) - f \|_{C(\mathbb{T})} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad , \; f \in C(\mathbb{T})$

$* \quad \| f \|_{C(\mathbb{T})} = \| f \|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{T}} | f(x) |.$

Απόδειξη:

i) Για $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{T}$ είναι

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = (F_n * f)(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \left[f_y(x) - f(x) \right] dy \; .$$

Άρα, $\| \sigma_n(f) - f \|_p =$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \left[f_y(x) - f(x) \right] dy \right|^p dx \right\}^{1/p}$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \left[f_y(x) - f(x) \right] dy \right\|_p \leq$$

Minkowski

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \cdot \| f_y - f \|_p \, dy .$$

Τώρα, έστω $\varepsilon > 0$. Καθώς

$\| f_y - f \|_p \xrightarrow{y \to 0} 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$

τ.ω. $-\delta < y < \delta \Rightarrow \| f_y - f \|_p < \varepsilon$.

Άρα,

$$\| \sigma_n(f) - f \|_p \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\, dy \; +$$

$$+ \frac{2 \| f \|_p}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi - \delta} F_n(y)\, dy$$ και αφήνοντας

το $n \to \infty$ λαμβάνουμε ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \| \sigma_n(f) - f \|_p \leq \varepsilon + 2 \| f \|_p \cdot 0 = \varepsilon .$$

Αφού το ε επιλέχθηκε τυχαία, καταλήγουμε ότι $\lim_{n \to \infty} \| \sigma_n(f) - f \|_p = 0$.

ii) Είναι $\sigma_n(f, x) - f(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \cdot [f_y(x) - f(x)]\, dy \Rightarrow$$

$$\| \sigma_n(f) - f \|_{C(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \cdot \| f_y - f \|_{C(\mathbb{T})}\, dy$$

και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

$$* \quad |\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \quad \{F_n(y) \geq 0\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \cdot |f_y(x) - f(x)| \, dy \,. \qquad \square$$

<u>Η κατά σημείο σύγκλιση των Cesàro μέσων</u>

Αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε απ' το ii) του προηγούμενου θεωρήματος, $\sigma_n(f) \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$.

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $x \in \mathbb{T}$ σημείο ασυνέχειας της f, τότε η $(\sigma_n(f,x))_n$ δεν συγκλίνει απαραίτητα και όταν συμβαίνει αυτό το όριο δεν είναι κατ' ανάγκη ίσο με $f(x)$.

π.χ. $f(x) = \chi_{[0,\pi)}(x)$, τότε

$\sigma_n(f,\pi) \longrightarrow 1/2$

$\sigma_n(f,0) \longrightarrow 1/2$

<u>Θεώρημα</u> (Fejer): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

i) Έστω $x \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\lim\limits_{s \to 0} \{ f(x+s) + f(x-s) - 2a \} = 0^{(I)}$, τότε $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n} a$. Επομένως, αν f συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, $\sigma_n(f,x) \longrightarrow a = f(x)$.

ii) Αν I κλειστό διάστημα σημείων συνέχειας της f, τότε η σύγκλιση $\sigma_n(f) \longrightarrow f$ είναι ομοιόμορφη στο I, δηλαδή $\sup\limits_{x \in I} |\sigma_n(f,x) - f(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Απόδειξη: i) Έστω $x \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την (I) $\left[\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} = a \right]$.

Τότε, για $n \in \mathbb{N}$ είναι

$\sigma_n(f,x) - a = (F_n * f)(x) - a =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F_n(y)[f(x-y) - a]\,dy =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} F_n(y) \cdot [f(x-y) - a]\,dy}_{(A)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} F_n(y)[f(x-y) - a]\,dy =$$

$\leftarrow y' = y - 2\pi$

$$= (A) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} F_n(y'+2\pi)[f(x+2\pi-y') - a]\,dy'$$

2π-περιοδικότητα

$$\stackrel{\downarrow}{=} (A) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} F_n(y')[f(x-y') - a]\,dy' =$$

$y = -y'$ $\quad$ F_n άρτια

$$= (A) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} F_n(-y)[f(x+y) - a]\,dy' =$$

$$= (A) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} F_n(y)[f(x+y) - a]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} F_n(y)[f(x-y) + f(x+y) - 2a]\,dy.$$

Άρα, $|\sigma_n(f,x) - a| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} F_n(y) \cdot |f(x-y) + f(x+y) - 2a|\,dy.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $\delta = \delta(\varepsilon, x)$

τ.ω. για $|y| < \delta$ $\Rightarrow$

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι, έχουμε

$$|\sigma_n(f,x) - a| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\delta} F_n(y) |f(x+y) + f(x-y) - 2a| \, dy +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} F_n(y) \cdot |f(x+y) + f(x-y) - 2a| \, dy$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} F_n(y) \cdot |f(x+y) + f(x-y) - 2a| \, dy.$$

Θα φράξουμε και το 2ο ολ/μα.

Ισχυρισμός 1 :

$$F_n(y) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin^2\left((n+1)\frac{y}{2}\right)}{\sin^2(y/2)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \quad \forall \, y \in (\delta, \pi)$$

(εύκολο, το έχουμε ξαναδεί).

Ισχυρισμός 2:

$$\sup_{\delta<y<2\pi-\delta} |F_n(y)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\ \delta>0.$$

(άσκηση).

Τελικά, το 2ο ολ/μα δίνει

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\delta}^{\pi} F_n(y)\cdot|f(x+y)+f(x-y)-2a|\,dy$$

$$\leq \left\{\sup_{\delta<s<\pi} F_n(y)\right\}\cdot 2(\|f\|_1+|a|)\,\frac{\pi-\delta}{2\pi}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Επομένως, για το δοθέν $\varepsilon>0$, βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\delta}^{\pi} F_n(y)\cdot|f(x+y)+f(x-y)-2a|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\ n\geq n_0$ [Το n_0 εξαρτάται απ' τα ε, δ, που το δ εξαρτάται απ' τα ε, x].

Τελικά, για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$|\sigma_n(f,x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$

$\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Ιδιαιτέρως, αν το $x \in \mathbb{T}$ είναι σημείο συνέχειας της f, τότε $a = f(x)$ και άρα $\sigma_n(f,x) \longrightarrow f(x)$, όσο $n \to \infty$.

ii) Για την ομοιόμορφη σύγκλιση σε κλειστά διάστημα σημείων συνέχειας της f παρατηρούμε:

Στο i), το n_0 εξαρτόταν απ' το x μόνο μέσω της εξάρτησής του απ' το δ. Για $a_x = f(x)$, επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό I, είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Άρα, δοθέντος $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ τ.ω. $|f(x+s) + f(x-s) - 2a_x| < \varepsilon$

για κάθε $x \in I$ και για κάθε

$s \in (-\delta, \delta)$. Συνεπώς, το δ δεν εξαρτάται

από τα $x \in I$ και έτσι $\sigma_n(f) \to f$

ομοιόμορφα. $\square$

// Για το ii):

$$|\sigma_n(f,x) - a| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} F_n(y)\,|f(x-y) + f(x+y) - 2a|\,dy\,,$$

$x \in I$.

Έστω $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon)$ τ.ω.

$$|y| < \delta \Rightarrow |f(x-y) + f(x+y) - 2a| < \varepsilon/2$$

$\forall \; x \in I$.

Άρα, $|\sigma_n(f,x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} +$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{\pi} F_n(y) \cdot |\ldots|\,dy \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow$$

$\exists \; n_0 = n_0(\delta) = n_0(\varepsilon)$ τ.ω.

$|\sigma_n(f,x)| - \alpha| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$,

$x \in I \Rightarrow \sigma_n(f) \xrightarrow{\text{ομ.}} f$. //

<u>Παρατήρηση</u>: Η απόδειξη του θεωρήματος Fejer δουλεύει για $K_n * f$, όπου (K_n) πυρήνας τ.ω. 1) $K_n(x) = K_n(-x)$ $\forall\, n$, $\forall\, x \in \mathbb{T}$ και

2) $\sup\limits_{\delta < x < \pi} |K_n(x)| \longrightarrow 0$, όσο $n \to \infty$,

για κάθε $\delta \in (0,\pi)$.

<u>Θεώρημα</u> (Lebesgue): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1) Έστω $x \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $\alpha \in \mathbb{C}$ με

$$\frac{1}{h} \cdot \int_0^h |f(x+y) + f(x-y) - 2\alpha|\,dy \xrightarrow{h \to 0} 0 \quad (\text{II}).$$

Τότε, $\sigma_n(f,x) \longrightarrow \alpha$, όσο $n \to \infty$.

2) $\sigma_n(f,x) \longrightarrow f(x)$ $\forall\, x \in Leb(f)$, δηλ. σχεδόν παντού.

Απόδειξη (συνοπτικά):

i) Έστω $x \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την (II).

Ισχυρισμός: $0 \leq F_n(y) \leq \min\left\{n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)y^2}\right\}$, $0 < \delta < \pi$ (άσκηση).

Για $n \in \mathbb{N}$, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Fejer, έχουμε:

$\sigma_n(f, x) - a =$

$$= \int_0^\delta F_n(y)\left[f(x-y) + f(x+y) - 2a\right]\frac{dy}{2\pi} +$$

$$+ \int_\delta^\pi F_n(y)\left[f(x-y) + f(x+y) - 2a\right]\frac{dy}{2\pi},$$

για κάποιο $\delta > 0$.

Για το 2º ολ/μα, είναι

$$\left|\int_\delta^\pi F_n(y)\left[f(x+y) + f(x-y) - 2a\right]\frac{dy}{2\pi}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\pi(\pi - \delta)}{(n+1)\delta^2} \cdot \left(\|f\|_1 + |a|\right).$$

Επιλέγουμε $\delta_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$,

τότε $\left| \int_{\delta_n}^{\pi} K_n(y) [f(x+y) + f(x-y) - 2a \right| \dfrac{dy}{2\pi}$

$\longrightarrow 0$, όσο $n \to \infty$.

Για το 2ο: ολ/μα:

ii) Έστω ότι $x \in Leb(f)$, να δείξουμε ότι $\sigma_n(f,x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$.

Είναι $x \in Leb(f) \Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \cdot \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \cdot \int_{-h}^{h} |f(y+x) - f(x)|\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{0}^{h} |f(y+x) - f(x)|\, dy +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{0} |f(y+x) - f(x)|\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{0}^{h} |f(y+x) - f(x)|\, dy +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{0}^{h} |f(x-y) - f(x)|\, dy = 0$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_0^h |f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|\,dy$$

$= 0$ και απ' το i) έπεται ότι

$\sigma_n(f,x) \longrightarrow f(x)$, όσο $n \to +\infty$. □

Τάξη μεγέθους συντελεστών Fourier

Από λήμμα Riemann - Lebesgue

είναι $\hat{f}(k) \longrightarrow 0$, όσο $|k| \to +\infty$.

Με τι ρυθμό συγκλίνει η $(\hat{f}(k))$;

• Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ακολουθία τ.ω.

$a_n = a_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, ώστε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$$

$$= a_0 + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} 2a_n (e^{int} + e^{-int})$$

$$= a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$ [για την

περίπτωση που $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} < +\infty$]

Οι παραπάνω σειρές καλούνται σειρές συνημιτόνων.

- Αν $a_n = -a_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} =$$

$$= a_0 + 2i \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Αυτές, λέγονται σειρές ημιτόνων.

<u>Θεώρημα</u> (Kolmogorov): Έστω $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ τ.ω. $a_k \geq 0$ $\forall k$

$a_k = a_{-k}$, $a_k \xrightarrow{|k| \to \infty} 0$ και

$a_{k+1} + a_{k-1} - 2a_k \geq 0$ (I), $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Τότε, υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = a_k$, $k \in \mathbb{Z}$.