27-3-23

Σειρές Fourier

• Έστω $\mathbb{T} = \{ e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi) \} = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$. Τον εφοδιάζουμε με τη μετρική

$$d(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \min\{ |\theta - \theta'|, 2\pi - |\theta - \theta'| \}$$

(γεωδαισιακή μετρική).

Ταυτίζουμε τον $(\mathbb{T}, d)$ με το $[0, 2\pi)$. Μ' αυτή τη μετρική ο $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής μ.χ. και η $[0, 2\pi) \ni \theta \longmapsto e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ είναι ομοιομορφισμός.

• Υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στον $\mathbb{T}$ και 2π-περιοδικών μιγαδικών συναρτήσεων ως εξής:

$$\{F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ 2\pi\text{-περιοδική}\}$$

Για $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $e^{ix} \mapsto F(e^{ix})$, ορίζουμε $f(x) = F(e^{ix})$ και η f είναι 2π-περιοδική.

Αντίστροφα, για μια 2π-περιοδική $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ορίζουμε $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ [είναι καλά ορισμένη καθώς για $e^{ix_1} = e^{ix_2} \Rightarrow x_1 = x_2 + 2\pi \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$].

• Με βάση τα παραπάνω, χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για συναρτήσεις $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-περιοδικές. Επίσης, τα αναλυτικά χαρακτηριστικά της μιας κλάσης, βρίσκονται σε αντιστοιχία με αυτά της άλλης (π.χ. συνέχεια, ολοκληρωσιμότητα κ.ο.κ.)

• Για $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη είχαμε τον συμβολισμό

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx .$$

* $\int_I f\,dx = \int_I \mathrm{Re} f\,dx + \int_I \mathrm{Im} f\,dx$, όταν τα δύο ολ/τα στα αριστερά είναι πεπ/να.

* Ισχύει ότι $\int_\alpha^b f\,dx = F(b) - F(a)$,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $[\,f' = \mathrm{Re} f' + i \mathrm{Im} f'\,]$

* Τα μετρήσιμα του $\mathbb{T}$ ταυτίζονται με τα μετρήσιμα του $[0, 2\pi)$

* Θα χρησιμοποιούμε συχνά την

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\,dx$$

<u>Βασική ιδιότητα</u>: Για κάθε $s \in \mathbb{T}$ είναι

$$\int_{\mathbb{T}} f(t-s)\,dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt .$$

Απόδειξη: $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t-s)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t-s)\,dt =$

$$= \int_{-s}^{2\pi - s} f(z)\,dz \underset{\substack{\text{περιοδικότητα} \\ \text{της } f}}{=} \int_0^{2\pi} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt . \quad \square$$

<u>Ορισμοί</u> :

1) Τριγωνομετρικό πολ/μο είναι μια συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C} .$$

[Η p είναι 2π-περιοδική και θα μπορούσατε να γράψουμε $p : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$].

Το p έχει βαθμό n, αν ο n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο $c_n \neq 0$ ή $c_{-n} \neq 0$.

Ο βαθμός του σταθερού πολ/μου θεωρείται μηδέν.

2) Τριγωνομετρική σειρά καλούμε μια σειρά της μορφής $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, $x \in \mathbb{T}$

<u>Παρατήρηση</u>: Αρχικά, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} p(x) e^{-ikx} dx =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{r=-n}^{n} c_r \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{i(r-k)x} dx = c_k ,$$

για $-n \leq k \leq n$.

Δηλαδή, οι αριθμοί

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\mathbb{T}} p(x)e^{-ikx}\,dx$$ καθορίζουν πλήρως

το τριγωνομετρικό πολ/μο.

• Παίρνοντας κίνητρο από τα τριγωνομετρικά πολ/μα, θα ορίσουμε τους αριθμούς

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}\,dx$$ για κάθε

$f \in L^2(\mathbb{T})$.

θα εξηγηθεί.

<u>Ορισμός</u> : Για κάθε $1 \leq p < +\infty$ θεωρούμε τον χώρο $L^p(\mathbb{T})$ που αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες $\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx < +\infty$.

Αν θέλαμε να είμαστε τελείως τυπικοί

θα ξεκινάγαμε από τον $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ και έπειτα $L^p(\mathbb{T}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{T})/\sim$, κατά τα γνωστά.

Εφοδιάζουμε τον $L^p(\mathbb{T})$ με τη νόρμα $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

και έτσι λαμβάνουμε τον $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ να είναι Banach.

Προφανώς, υπάρχει και ο χώρος των ουσιωδώς φραγμένων, μετρήσιμων, 2π-περιοδικών συναρτήσεων, $(L^\infty(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, όπου $\|f\|_\infty = \min\{t>0 : \lambda([|f|>t]) = 0\}$, που είναι επίσης Banach.

* Για $1 \leq p < q \leq +\infty$ ισχύει ότι $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ (Hölder) και

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

Συνεπώς, $L^p(\mathbb{T}) \supseteq L^q(\mathbb{T})$ για κάθε $p \leq q$.

<u>Ορισμός</u> (συντελεστές και σειρά Fourier μιας $f \in L^1(\mathbb{T})$):

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον αριθμό

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

και τον καλούμε k-οστό συντελεστή Fourier της f.

Ορίζουμε επίσης τη σειρά Fourier της f, $S(f, x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$

[Προσοχή! Το σύμβολο $\sim$ δεν υπονοεί τίποτα για τη σύγκλιση της σειράς, πόσο μάλλον για τη σύγκλιση στο $f(x)$.]

Θα γράφουμε $S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}$ για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f.

Γενικά, μια τριγωνομετρική σειρά θα λέγεται σειρά Fourier αν είναι η σειρά Fourier κάποιας $f \in L^1(\mathbb{T})$.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $c \in \mathbb{C}$, τότε:

1) $\widehat{(f+g)}(k) = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$

2) $\widehat{(cf)}(k) = c\hat{f}(k)$

3) $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$

4) Αν για $s \in \mathbb{T}$ ορίσουμε $f_s(t) = f(t-s)$, τότε $\hat{f_s}(k) = e^{-iks}\hat{f}(k)$

5) $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, δηλαδή

$$\| \hat{f} \|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq \| f \|_1$$

Απόδειξη:

1) $\widehat{(f+g)}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} (f(x)+g(x))\, e^{-ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx}\, dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} g(x) e^{-ikx}\, dx =$

$= \hat{f}(k) + \hat{g}(k).$

2) Εύκολο

3) $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \overline{\overline{f(x)}\, e^{-ikx}}\, dx =$

$= \overline{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \overline{f(x)}\, e^{-ikx}\, dx} = \overline{\hat{\overline{f}}(k)}$

4) $\hat{f_s}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f_s(x)\, e^{-ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-s) e^{-ikx}\, dx \overset{x-s=y}{=}$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-ik(y+s)} dy =$$

$$= e^{-iks} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-iky} dy =$$

$$= e^{-iks} \hat{f}(k) .$$

5) Είναι $|\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx \right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx = \|f\|_1 .$$

$\Rightarrow \{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ φραγμένη. □

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(f_n) \subset L^1(\mathbb{T})$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, για $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, $\hat{f}_n(k) \xrightarrow{n \to \infty} \hat{f}(k)$ ομοιόμορφα ως προς k, δηλαδή $\sup_k |\hat{f}_n(k) - \hat{f}(k)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Απόδειξη: Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $|\hat{f}_n(k) - \hat{f}(k)| =$

$= |\widehat{(f_n - f)}(k)| \leq \|f_n - f\|_1 \Longrightarrow$

$\sup_k |\hat{f}_n(k) - \hat{f}(k)| \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

<u>Πόρισμα</u>: Αν $S \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ είναι τριγωνομετρική σειρά τ.ω. τα μερικά αθροίσματα να είναι $S_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, τότε $c_k = \hat{f}(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} (f(x) - S_n(x)) e^{-ikx}\, dx +$

$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} S_n(x) e^{-ikx}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$

Επίσης, για $n \geq |k|$ είναι

$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} S_n(x) e^{-ikx}\, dx$.

Άρα, $|\hat{f}(k) - c_k| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} (f(x) - S_n(x))\, e^{-ikx}\, dx \right| \leq$$

$\leq \| S_n - f \|_1$ και άρα, παίρνοντας

όρια καθώς $n \to \infty$, λαμβάνουμε ότι

$\hat{f}(k) = c_k$. □

<u>Παρατήρηση</u>: Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x)\, dx .$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(0) = 0$.

Τότε, η $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{T}$ είναι

στον $L^1(\mathbb{T})$ (2π-περιοδική) και

$$\hat{F}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{ik} .$$

Απόδειξη: Είναι $f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow F \in C(\mathbb{T})$

$\Rightarrow F \in L^1(\mathbb{T})$. [Για την 2π-περιοδικό-

τητα: $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 2\pi \hat{f}(0) = 0 =$

$= F(0)$.

Και $\hat{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F(x) e^{-ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F(x) \left(\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right)' dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot F(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big]_0^{2\pi} +$

$+ \frac{1}{ik} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} F'(x) e^{-ikx}\, dx =$

$= \frac{1}{ik} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{\hat{f}(k)}{ik}$. $\square$

<u>Πόρισμα</u>: Αν f απολύτως συνεχής στο $\mathbb{T}$, τότε $f' \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε χβγ ότι $\hat{f}(0) = 0$.

Τότε, το αόριστο ολ/μα της f' είναι η f και από προηγούμενη πρόταση είναι $\hat{f}(k) = \frac{\widehat{(f')}(k)}{ik}$. $\square$

* f απολύτως συνεχής $\Rightarrow$ f διαφορίσιμη λ-σ.π. και $f' \in L^1(\mathbb{T})$

* Αν $\hat{f}(0) \neq 0$, τότε θέτουμε $\tilde{f}(x) = f(x) - \hat{f}(0)$.

* f απολύτως συνεχής στον $\mathbb{T}$ σημαίνει ότι: f απολύτως σ/χής στο $[0, 2\pi)$ και 2π-περιοδική.

28-3-23

<u>Συνέλιξη</u>: Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Ορίζουμε την συνέλιξη των f, g, $f*g$ ως εξής: $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\, g(y)\, dy$.

• Η $f*g$ είναι καλά ορισμένη: Η $(x, y) \longmapsto f(x-y)g(y)$ είναι μετρήσιμη και έχουμε:

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dy\,dx \underset{\text{Tonelli}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |g(y)|\cdot \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |g(y)|\cdot \int_{\mathbb{T}} |f_y(x)|\,dx\,dy =$$

$$= 4\pi^2 \cdot \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < +\infty \Rightarrow$$

$f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ και από Fubini, η $x \mapsto \int f(x-y)g(y)\,dy =$

$= (f*g)(x)$ είναι στον $L^1(\mathbb{T})$ σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbb{T}$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, τότε:

1) $f*g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

2) $(\widehat{f*g})(k) = \hat{f}(k)\cdot\hat{g}(k)$.

Απόδειξη: 1) Ήδη δείχθηκε ότι

$f * g \in L^1(\mathbb{T})$. Επίσης, $\| f * g \|_1 =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} |(f * g)(x)| \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(x-y) g(y) \, dy \right| dx \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} \cdot \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| \cdot |g(y)| \, dy \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} |g(y)| \cdot \int_{\mathbb{T}} |f_y(x)| \, dx \, dy =$$

$$= \| g \|_1 \cdot \| f \|_1 .$$

2) $$(\widehat{f * g})(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} (f * g)(x) e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(x-y) g(y) \, dy \, e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y) \int_{\mathbb{T}} f(z) e^{-ik(z+y)} \, dz \, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{T}} g(y) \cdot e^{-iky} \int_{\mathbb{T}} f(z) e^{-ikz} \, dz \, dy =$$

$= \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$. $\square$

Πρόταση : Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε :

1) $f * g = g * f$

2) $(f*g)*h = f*(g*h)$

3) $f*(g+h) = f*g + f*h$.

Απόδειξη :

1) $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y) g(y)\, dy =$

$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x}^{x-2\pi} f(u) g(x-u)\, du =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x-2\pi}^{x} f(u) g(x-u)\, du = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} f(u) g(x-u)\, du =$

$= (g*f)(x)$.

2) $[f*(g*h)](x) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,(g*h)(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,g(y-z)\,h(z)\,dz\,dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot \int_{\mathbb{T}} h(z)\int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,g(y-z)\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}} h(z)\int_{-z}^{2\pi-z} f(x-z-u)\,g(u)\,du\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbb{T}} h(z)\,(f*g)(x-z)\,dz =$$

$$= [(f*g)*h](x).$$

3) $[f*(g+h)](x) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,[g(y)+h(y)]\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,g(y)\,dy\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{\mathbb{T}} f(x-y)\,h(y)\,dy =$$

$= (f * g)(x) + (f * h)(x).$ $\square$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και

$e_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{T}$. Τότε,

$(e_k * f)(x) = e_k(x)\, \hat{f}(k).$

Απόδειξη: $(e_k * f)(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} e_k(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{ik(x-y)} f(y)\, dy =$$

$$= \frac{e^{ikx}}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{-iky} f(y)\, dy = e_k(x)\, \hat{f}(k).$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$,

τριγωνομετρικό πολ/μο. Τότε, για

$f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι

$$(P * f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) c_k e^{ikx}.$$

Απόδειξη:

$$(P * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} P(x-y) f(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{T}} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(x-y)} f(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \int_{\mathbb{T}} f(y) e^{-iky} dy =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) c_k e^{ikx} . \quad \square$$

Πριν περάσουμε στους πυρήνες αθροισιμότητας, δείχνουμε δύο βασικά αποτελέσματα για τον $L^1(\mathbb{T})$.

<u>Πρόταση</u>: 1) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f_y(x) = f(x-y)$, $x, y \in \mathbb{T}$, τότε $f_y \in L^1(\mathbb{T})$ και $\| f_y \|_1 = \| f \|_1$.

2) Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι $\lim\limits_{y \to 0} \| f_y - f \|_1 = 0$ και $\lim\limits_{y \to z} \| f_y - f_z \|_1 = 0$.

<u>Τύπος αλλαγής μεταβλητής</u>: Αν $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτά, $T : U \to V$ συνεχώς διαφορίσιμη, 1-1 με $\det(T'(x)) \neq 0$ $\forall x \in U$, τότε

$$\int_U f(T(x))\,|\det T'(x)|\,dx = \int_V f(y)\,dy$$

για κάθε θετική μετρήσιμη f.

<u>Πυρήνες αθροισιμότητας</u>

<u>Ορισμός</u>: Ένας πυρήνας αθροισιμότητας στον $\mathbb{T}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{T}$, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω.

1) $\dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\,dx = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\,dx < +\infty$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{2\pi} |K_n(x)|\,dx = 0 \quad \forall\, \delta > 0.$

Για την ii) $\sup_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx$

$< +\infty \Rightarrow \exists\, M > 0$ τ.ω.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx \leq M \quad \forall n.$$

Θεώρημα: Έστω (K_n) πυρήνας αθροισιμότητας και $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\| f * K_n - f \|_1 \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για $n \in \mathbb{N}$ είναι $\| f * K_n - f \|_1 =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(y) \left(f_y(x) - f(x) \right) dy \right| dx \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)| \cdot \| f_y - f \|_1 \, dy.$$

Είναι $\lim_{y \to 0} \| f_y - f \|_1 = 0$, άρα για το $\varepsilon > 0$ στην αρχή, βρίσκουμε $\delta > 0$ τ.ω.

$|y| < \delta \Leftrightarrow -\delta < y < \delta$ με

$\| f_y - f \|_1 < \varepsilon$.

Επίσης, για $\delta < y < 2\pi - \delta$, $\| f_y - f \|_1 \leq \| f_y \|_1 + \| f \|_1 = 2 \| f \|_1$ και άρα

$$\| K_n * f - f \|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_n(y)| \cdot \| f_y - f \|_1 \, dy + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |K_n(y)| \cdot \| f_y - f \|_1 \, dy \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{T}} |K_n(y)| \, dy}_{\leq M} + \frac{2 \| f \|_1}{2\pi} \cdot \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |K_n(y)| \, dy$$

Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$, απ' τις ιδιότητες του (K_n) έχουμε:

$$\limsup_{n \to \infty} \| K_n * f - f \|_1 \leq \frac{\varepsilon \cdot M}{2\pi} + 0 = \frac{\varepsilon M}{2\pi}$$

και αυτό για κάθε $\varepsilon > 0$,

άρα $\lim_{n \to \infty} \| f * K_n - f \|_1 = 0$. □