* κάθε s απλή και μετρήσιμη με $\mu([s\neq 0])<\infty$ γράφεται όπως πριν, δηλ. $\mu(A_k)<\infty$ $\forall k$ τ.ω. $\alpha_k\neq 0$ και $A_1,\dots,A_n$ ξένα.

* Η τιμή 0 δεν έχει νόημα σε απλή μετρήσιμη.

Έστω τώρα $f\in L^p$. Θεωρούμε, μέσω γνωστού θεωρήματος, απλές και μετρήσιμες συναρτήσεις s_n που συγκλίνουν στην $|f|$, $0\leq s_n\leq |f|$ $\forall n$ και $s_n\nearrow |f|$. Θέτουμε $f_n = s_n\cdot \mathrm{sgn}(f)$: είναι $f_n \xrightarrow{n} f$ κ.σ. και $\forall n$ $\mu(\{x\in X: f_n(x)\neq 0\})<\infty$ ($(s_n)^p\leq |f|^p \Rightarrow \int |s_n|^p\leq \int|f|^p<\infty$). Επίσης, $|f_n-f|^p\leq |f|^p\in L^1$ ($|f_n-f| = |s_n\cdot\mathrm{sgn}(f)-|f|\cdot\mathrm{sgn}(f)| = |f|-s_n\leq |f|$). Άρα, από Θ.Κ.Σ. λαμβάνουμε ότι $\int|f_n-f|^p\xrightarrow{n} 0 \Leftrightarrow \|f_n-f\|_p\xrightarrow{n} 0$. □

15-2-23

• Έστω $p>1$ και p,q συζυγείς εκθέτες. Αν $f\in L^p$, $g\in L^q$, από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι $\int|fg|\,d\mu\leq \|f\|_p\cdot\|g\|_q<\infty$. Άρα, η απεικόνιση
$\phi_g: L^p\to \mathbb{K}$ με $\phi_g(f)=\int f\cdot g\,d\mu$ είναι καλώς ορισμένη. Για σταθερό λοιπόν $g\in L^q$, η ϕ_g θα είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον L^p. Επιπλέον, έχουμε ότι $|\phi_g(f)| = |\int fg\,d\mu|\leq \int|fg|\,d\mu\leq \|f\|_p\cdot\|g\|_q$, $f\in L^p$ και άρα $\|\phi_g\|\leq\|g\|_q$. Συνεπώς, για κάθε $g\in L^q$ είναι $\phi_g\in (L^p)^*$.

• Ορίζουμε απεικόνιση $T: L^q\to (L^p)^*$, $g\mapsto \phi_g = T(g)$.

- Η T είναι γραμμική: Για $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$, $g_1,g_2\in L^q$

είναι $T(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)=\phi_{\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2}$ και για $f\in L^p$,

$\phi_{\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2}(f)=\int \alpha_1 g_1 f+\alpha_2 g_2 f\, d\mu=\alpha_1\int g_1 f\, d\mu +$
$+\alpha_2\int g_2 f\, d\mu=\alpha_1\phi_{g_1}(f)+\alpha_2\phi_{g_2}(f)$. Άρα, $T(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2)=$
$=\phi_{\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2}=\alpha_1\phi_{g_1}+\alpha_2\phi_{g_2}=\alpha_1 T(g_1)+\alpha_2 T(g_2)$.

- Η T είναι ισομετρία: Θέλω ν.δ.ο. $\forall g\in L^q$, $\|g\|_q=$
$=\|T(g)\|=\|\phi_g\|$.
Έχουμε ήδη δείξει ότι $\|\phi_g\|\le\|g\|_q$. Ορίζουμε
$f=|g|^{q-1}\cdot sgn(g)$ (υποθέτουμε ότι $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

$(*)$: $|\phi_g(f)|=|\int fg\, d\mu|=|\int |g|^{q-1}\cdot \underbrace{g\cdot sgn(g)}^{|g|}\, d\mu|=$
$=|\int|g|^q d\mu|=\|g\|_q^q$.

$(**)$: $\|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{1/p}=\left(\int|g|^{(q-1)\cdot p}d\mu\right)^{1/p}\overset{p,q \text{ συζυγείς}}{=}$
$=\left(\int|g|^q d\mu\right)^{1/p}=\|g\|_q^{q/p}<\infty$ (άρα $f\in L^p$ και καλώς γράψαμε η $(*)$).
Έτσι, έχουμε $|\phi_g(f)|\overset{(*)}{=}\|g\|_q^q=\|g\|_q\cdot\|g\|_q^{q-1}\overset{(**)}{=}$
$=\|g\|_q\cdot\|f\|_p$ $\left(q-1=q(1-1/q)=q/p\right)$. Έπεται ότι
$\|\phi_g\|\ge\|g\|_q$ και τελικά η T είναι ισομετρία.

(▷ Είναι $|\phi_g(f)|\le\|\phi_g\|\,\|f\|_p$ $\forall f$ (1) και για τη συγκεκριμένη f δείξαμε ότι $|\phi_g(f)|=\|g\|_q\,\|f\|_p$.
Αν ίσχυε ότι $\|g\|_q>\|\phi_g\|$ τότε δεν θα ίσχυε η (1), άτοπο. Άρα, πρέπει $\|\phi_g\|\ge\|g\|_q$.

Θα δ.ο. ο T είναι επί: Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu(X)<\infty$. Έστω $\phi \in (L^p)^*$. Ορίζουμε $\nu(A) := \phi(\chi_A)$ για $A \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση ν είναι καλά ορισμένη καθώς $\|\chi_A\|_p = (\mu(A))^{1/p} < \infty$, αφού $\mu(X)<\infty$. Η απεικόνιση ν είναι μέτρο:

- $\nu(\emptyset) = \phi(\chi_\emptyset) = \phi(0) = 0$
- Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο σύνολα.

Θέτουμε $A = \bigcup_1^\infty A_n$ και έχουμε ότι $\sum_1^m \chi_{A_n} =$

$= \chi_{\bigcup_1^m A_n}$. Όμως, $\nu(\bigcup_1^m A_n) = \phi(\chi_{\bigcup_1^m A_n}) = \phi(\sum_1^m \chi_{A_n}) =$

$= \sum_1^m \phi(\chi_{A_n}) = \sum_1^m \nu(A_n)$.

Καθώς $m \to \infty$, το δεξί μέλος συγκλίνει στο $\sum_1^\infty \nu(A_n)$ (αν το όριο υπάρχει). Το όριο υπάρχει γιατί το αριστερό μέλος είναι ότι:

$$\nu(\bigcup_1^m A_n) = \phi(\chi_{\bigcup_1^m A_n}) \xrightarrow[\phi \text{ σ/χής}]{m \to \infty} \phi(\chi_{\bigcup_1^\infty A_n}) = \nu(\bigcup_1^\infty A_n).$$

Όπου η σύγκλιση $\chi_{\bigcup_1^m A_n} \xrightarrow{m\to\infty} \chi_{\bigcup_1^\infty A_n}$ είναι κατά σημείο, άρα $|\chi_{\bigcup_1^m A_n} - \chi_{\bigcup_1^\infty A_n}|^p \xrightarrow{m\to\infty} 0$ και $|\chi_{\bigcup_1^\infty A_n} - \chi_{\bigcup_1^m A_n}| \leq 1$, συνεπώς από το Θ.Κ.Σ. λαμβάνουμε ότι $\chi_{\bigcup_1^m A_n} \xrightarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|_p} \chi_{\bigcup_1^\infty A_n}$. Συνεπώς, το ν είναι μέτρο (προσημασμένο).

↳ είναι $\nu(\bigcup_1^m A_n) = \sum_1^m \nu(A_n)$ και τα παραπάνω δίνουν ότι (αφήνοντας το $m \to \infty$):

$$\nu(\bigcup_1^\infty A_n) = \lim_m \nu(\bigcup_1^m A_n) = \lim_m \sum_1^m \nu(A_n) = \sum_1^\infty \nu(A_n).$$

Παρατηρούμε ότι $|\nu(A)| = |\phi(\chi_A)| \leq \|\phi\| \cdot \|\chi_A\|_p = \|\phi\| \cdot (\mu(A))^{1/p}$. Συνεπώς, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) \Rightarrow \nu \ll \mu$ και άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει μετρήσιμη $g : X \to \mathbb{K}$ με $\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$. (I)

Από την (I) έπεται ότι $\phi(f) = \int f g \, d\mu$ για f απλή στον L^p. Πράγματι, είναι $f = \sum_1^n \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$, ώστε

$$\phi(f) = \sum_1^n \alpha_i \, \phi(\chi_{A_i}) = \sum_1^n \alpha_i \cdot \nu(A_i) = \sum_1^n \alpha_i \int_{A_i} g \, d\mu =$$

$$= \sum_1^n \alpha_i \int g \cdot \chi_{A_i} \, d\mu = \int g \cdot \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu = \int f \cdot g \, d\mu .$$

Δείχνουμε τώρα ότι $g \in L^q$: Υπάρχουν απλές, μετρήσιμες $h_n \geq 0$, $h_n \leq h_{n+1}$ με $h_n \nearrow |g|$. Ορίζουμε $f_n = h_n^{q-1} \cdot \operatorname{sgn}(g)$ που είναι απλή.

$\Rightarrow |g| \geq h_n \; \forall n$

Τότε, $\phi(f_n) = \int f_n \cdot g \, d\mu = \int h_n^{q-1} \cdot |g| \, d\mu \geq \int h_n^q \, d\mu =$

$= \|h_n\|_q^q$.

Από την άλλη, είναι $|\phi(f_n)| \leq \|\phi\| \cdot \|f_n\|_p = \|\phi\| \cdot \|h_n\|_q^{q-1}$,

καθώς $\|f_n\|_p = \left(\int |f_n|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int h_n^{(q-1) \cdot p} \, d\mu \right)^{1/p} =$

$= \left(\int h_n^q \, d\mu \right)^{1/p} = \|h_n\|_q^{q/p} = \|h_n\|_q^{q-1}$.

Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\|h_n\|_q^q \leq \|\phi\| \cdot \|h_n\|_q^{q-1} \Leftrightarrow \|h_n\|_q \leq \|\phi\|$ ($\|\phi\| < \infty$ καθώς $\phi \in (L^p)^*$). Είναι $h_n^q \nearrow |g|^q$, άρα $\int |g|^q \, d\mu = \lim_n \int h_n^q \, d\mu \leq \|\phi\| < \infty$ και συνεπώς $g \in L^q$.

Τέλος, δείχνουμε ότι $\phi(f) = \int f \cdot g \, d\mu \quad \forall f \in L^p$.
Είδαμε ότι το παραπάνω ισχύει για τις απλές του L^p. Ορίζουμε $\phi_g(f) = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L^p$. Όμως, οι απλές είναι πυκνές στον L^p και ϕ, ϕ_g συνεχείς (ως φραγμένα συναρτησοειδή), συνεπώς $\phi = \phi_g$ σ' όλο τον L^p. Άρα, $\phi = T(g)$, δηλαδή η $T : L^q \to (L^p)^*$, $g \mapsto \phi_g$ είναι γραμμική ισομετρία και επί.

* Οι απλές είναι πυκνές στον L^p : Γίνεται χρήση της ήδη προηγούμενης αποδεδειγμένης πρότασης, αφού λάβουμε υπόψιν μας ότι $\mu(X) < \infty$.

* $\phi(f) = \phi(\lim_n f_n) = \lim_n \phi(f_n) = \lim_n \phi_g(f_n) =$

$= \phi_g(\lim_n f_n) = \phi_g(f)$, όπου $\lim_n f_n = f$ στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$

Αν το μέτρο μ είναι σ-πεπ/νο εργαζόμαστε ως εξής: Έστω $(X_n)_n$ ακολουθία ξ.α.δ. συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(X_n) < \infty \ \forall n$ και $X = \bigcup_{1}^{\infty} X_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$, $A \in \mathcal{A}$

(το μ_n είναι πεπ/νο μέτρο). Έστω $\phi \in (L^p)^*$, θέτουμε $\phi_n(f) = \phi(f \cdot \chi_n)$, $f \in L^p$. Η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη διότι $f \in L^p(\mu_n) \Longleftrightarrow f \cdot \chi_{X_n} \in L^p(\mu)$. Το ϕ_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^p(\mu_n)$ που είναι φραγμένο: Για κάθε $f \in L^p(\mu_n)$ είναι
$|\phi_n(f)| = |\phi(f \cdot \chi_{X_n})| \leq \|\phi\| \cdot \|f \cdot \chi_{X_n}\|_{L^p(\mu)} =$

$= \|\phi\| \cdot \|f\|_{L^p(\mu_n)}$ και έτσι $\|\phi_n\| \leq \|\phi\| < \infty$, άρα

$\phi_n \in (L^p(\mu_n))^*$, όπου μ_n πεπ/νο μέτρο. Άρα, από την περίπτωση που $\mu(X)<\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $g_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$ ώστε $\phi_n(f) = \int f \cdot g_n \, d\mu_n \quad \forall f \in L^p(\mu_n)$.

Ισοδύναμα, $\phi(f \cdot \chi_{X_n}) = \int_{X_n} f \cdot g_n \, d\mu \quad \forall f \in L^p(\mu_n)$.

Μπορούμε να επιλέξουμε την g_n έτσι ώστε $g_n(x) = 0$ όσο $x \in X \setminus X_n$. Θέτουμε τότε $g(x) = g_n(x)$ όταν $x \in X_n$. Η g είναι καλώς ορισμένη ($(X_n)_n$ ξένη διαμέριση του X) και $g = \sum_1^\infty g_n$.

Δείχνουμε ότι $g \in L^q$: Ορίζουμε $G_m = \sum_1^m g_n$ και $\nu_m = \mu|_{\cup_1^m X_n}$. Θέτουμε επίσης $\phi_m(f) = \phi(f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n})$ για $f \in L^p(\nu_m) \iff f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n} \in L^p(\mu)$. Τέλος, θέτουμε $\mathcal{G}_m = g \cdot \chi_{\cup_1^m X_n}$

Καλλιγραφικό.

Τότε, $\phi_m(f) = \phi(f \cdot \overbrace{\chi_{\cup_1^m X_n}}^{\sum_1^m \chi_{X_n}}) = \sum_1^m \phi(f \cdot \chi_{X_n}) =$

$$= \sum_{n=1}^m \int_{X_n} f \cdot g_n \, d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^m f \cdot \chi_{X_n} \cdot g_n \right) d\mu = \int f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n} \cdot G_m \, d\mu =$$

$$= \int f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n} \cdot G_m \, d\nu_m = \int f \cdot G_m \, d\nu_m .$$

Επίσης, $\|G_m\|_{L^q(\nu_m)} = \left\| \sum_1^m g_n \right\|_{L^q(\nu_m)} \overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_1^m \|g_n\|_{L^q(\nu_m)} < \infty$.

Συμπεραίνω ότι $\|\phi_m\| = \|G_m\|_q$.

Επίσης, $|\phi_m(f)| = |\phi(f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n})| \leq \|\phi\| \cdot \|f \cdot \chi_{\cup_1^m X_n}\|_{L^p(\mu)}$

$\forall f \in L^p(\nu_m) \Rightarrow \|\phi_m\| \leq \|\phi\| \Rightarrow \|G_m\|_q \leq \|\phi\|$.

Η συνέχεια στην επόμενη διάλεξη.