20-2-23

...και καθώς $g = \lim_m G_m$, έχουμε $\int |g|^q \, d\mu =$

$= \int \lim_m |G_m|^q \, d\mu \leq \liminf_m \int |G_m|^q \, d\mu \leq \|\phi\|^q < \infty$.

Άρα, $g \in L^q(\mu)$.

Μένει νδο $\phi(f) = \int f g \, d\mu \quad \forall \, f \in L^p(\mu)$.

Είναι $\phi_m(f) = \int f \cdot \sum_1^m g_n \, d\mu \quad \forall \, f \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(V_m)$.

Για $f \in L^p(\mu)$ έχουμε $f \cdot \chi_{\cup X_n} \to f \iff$
$|f \cdot \chi_{\cup X_n} - f| \to 0$ και $|f \cdot \chi_{\cup X_n} - f|^p \leq |f|^p \in L^1(\mu)$,
άρα, από Θ.Κ.Σ., έχουμε ότι $f \cdot \chi_{\cup X_n} \to f$ στον L^p.

Έπεται ότι $\phi(f \cdot \chi_{\cup X_n}) \longrightarrow \phi(f)$, λόγω συνέχειας της ϕ στον L^p.

Γνωρίζουμε ότι $f \cdot \sum_1^m g_n = f \cdot G_m \longrightarrow f \cdot g$.

Είναι $|G_m| = |\sum_1^m g_n| = \sum_1^m |g_n| \leq$ $\left\{ \begin{array}{c} g_n(x) \neq 0 \text{ για} \\ \text{το πολύ ένα} \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

$\leq \sum_1^\infty |g_n| = |g|$.

Επομένως, $|f G_m| \leq |f g| \in L^1(\mu)$ (λόγω Hölder).

Από Θ.Κ.Σ. έπεται ότι $\int f G_m \, d\mu \xrightarrow{m} \int f g \, d\mu$

Δείξαμε ότι $\phi(f) = \int f g \, d\mu$.

Τελικά, ο $(L^p(\mu))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$. $\square$

<u>Θεώρημα 2ο</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπ/νου μέτρου. Τότε, ο $(L^1(\mu))^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(\mu)$.

Απόδειξη:

Αν $g \in L^\infty(\mu)$, τότε η $\phi_g(f) = \int fg\, d\mu$, $f \in L^1(\mu)$, ορίζει γραμμικό συναρτησοειδές που είναι φραγμένο:

$$|\phi_g(f)| = \left|\int fg\, d\mu\right| \le \int |fg|\, d\mu \le \|g\|_\infty \cdot \int |f|\, d\mu =$$

$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$. Άρα $\|\phi_g\| \le \|g\|_\infty$.

Η $T: L^\infty(\mu) \to (L^1(\mu))^*$ με $T(g) = \phi_g$ είναι γρ. ισομετρία.

Πράγματι, δοθέντος $\varepsilon > 0$ είναι $\mu(\{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$. Επειδή το μ είναι σ-πεπ/νο, υπάρχει $B \subseteq \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ τ.ω. $0 < \mu(B) < \infty$ και έστω $f = \chi_B \cdot \mathrm{sgn}(g) \in L^1(\mu)$ (εύκολο ότι $f \in L^1$).

Είναι $|\phi_g(f)| = \left|\int fg\, d\mu\right| = \left|\int_B |g|\, d\mu\right| \ge$

$\ge (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \mu(B) = (\|g\|_\infty - \varepsilon) \cdot \|f\|_1$

$|g| \cdot \chi_B > \|g\|_\infty - \varepsilon$

Άρα, $\|\phi_g\| \ge \|g\|_\infty - \varepsilon$ και αφού το ε επιλέχθηκε τυχαία, λαμβάνουμε ότι $\|\phi_g\| = \|g\|_\infty$.

Δείχνουμε ότι η T είναι επί: Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Έστω $\phi \in (L^1(\mu))^*$ και $\nu(A) = \phi(\chi_A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ που είναι μέτρο (προσ/νο).

Είναι $|\nu(A)| = |\phi(\chi_A)| \le \|\phi\| \cdot \|\chi_A\|_1 = \|\phi\| \cdot \mu(A)$, άρα $\nu \ll \mu$. Από το Θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει μετρήσιμη $g: X \to \mathbb{K}$ τ.ω. $\nu(A) = \int_A g\, d\mu$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Η σχέση $\phi(f) = \int fg\, d\mu$ ισχύει για f απλές στον

$L^1(\mu)$. Πράγματι, αν $f=\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$, τότε

$$\phi(f)=\phi\left(\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \phi\in(L^1(\mu))^*}}{=} \sum_1^n \alpha_i \phi(\chi_{A_i}) =$$

$$=\sum_1^n \alpha_i v(A_i) =$$

$$=\sum_1^n \alpha_i \int_{A_i} g\, d\mu = \sum_1^n \alpha_i \int \chi_{A_i} g\, d\mu =$$

$$=\int\left(\sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}\right) g\, d\mu = \int f g\, d\mu.$$

Δείχνουμε ότι $g\in L^\infty(\mu)$. Έστω ότι δεν ισχύει, τότε $\forall\, M>0$ θα ήταν $\mu(\underbrace{\{x\in X: |g(x)|>M\}}_{A(=A(M))})>0$.

Θεωρούμε την $f=\chi_A \operatorname{sgn}(g)$, τότε:

f απλή και $\phi(f)=\int fg\, d\mu = \int_A |g|\, d\mu > M\mu(A) =$

$= M\cdot\|f\|_1$. Άρα, $\|\phi\|\geq M$ και καθώς το M ήταν τυχαίο, καταλήγουμε ότι το ϕ δεν είναι φραγμένο, άτοπο, συνεπώς πρέπει $g\in L^\infty(\mu)$.

* Είναι $\|f\|_1=1$ και $\|\phi\|=\sup\{|\phi(f)|: \|f\|_1=1\}\geq \phi(f)$.

Έπεται ότι η ϕ_g είναι καλώς ορισμένη και συνεχής και έχουμε $\phi_g=\phi$ για απλές $f\in L^1$. Από συνέχεια έπεται ότι $\phi_g=\phi$ σε όλο τον L^1. Δηλαδή, $\phi(f)=\int fg\, d\mu$ $\forall\, f\in L^1(\mu)$. $\square$

plus πυκνότητα των απλών στον L^1
$(\mu(X)<\infty)$

<u>Σχόλια</u>: 1) Πρόσημο μιγαδικού: $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$, $z \neq 0$.

2) Όταν δείχναμε ότι η T είναι επί, παίρναμε $\phi \in (L^p)^*$ και ψάχναμε $g \in L^q$ τ.ω. $T(g) = \phi$. Υποθέσαμε ότι $\mu(X)<\infty$, ορίσαμε $\nu(A) = \phi(\chi_A)$, ορίσαμε g την παράγωγο R-N του ν ως προς μ και ορίσαμε απλές $0 \le h_n \nearrow |g|$, $f_n = h_n^{q-1} \cdot \operatorname{sgn}(g)$. Όσο $g: X \to \mathbb{R}$, οι f_n είναι απλές. Και ουσιαστικά δείξαμε ότι η T είναι επί όταν η ϕ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Για την γενική περίπτωση, $\phi \in (L^p(\mu))^*$, γράφαμε $\phi(f) = \operatorname{Re}\{\phi(f)\} + i \operatorname{Im}\{\phi(f)\}$. Εφαρμόζονται τα προηγούμενα για το πραγμ. και φανταστ. μέρος, παίρναμε $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\operatorname{Re}\phi(f) = \int f g_1 \, d\mu$, $\operatorname{Im}\phi(f) = \int f g_2 \, d\mu$, $\forall f \in L^p$. Τότε, η $g = g_1 + i g_2$ δίνει $\phi(f) = \int fg \, d\mu$. Και $g_1, g_2 \in L^q$ απ' όπου έχουμε ότι $g \in L^q$:

$$|g|^q = \left(\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\right)^q \le 2^{q/2} \left(\max\{g_1^2, g_2^2\}\right)^{q/2} =$$

$$= 2^{q/2} \cdot \max\{|g_1|^q, |g_2|^q\} \le 2^{q/2} \cdot (|g_1|^q + |g_2|^q).$$