22-2-23

Έστω $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, θα δείξουμε προσέγγιση συναρτήσεων του L^p από «καλές»

* Θυμίζουμε ότι αν $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, τότε οι απλές $s: X\to\mathbb{K}$ με $\mu(\{x\in X : s(x)\neq 0\})<\infty$ είναι πυκνές στον $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$. $1\le p<\infty$

<u>Ορισμός</u>: Έστω X μετρικός χώρος και $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$ η Borel σ-άλγεβρα του X. Ένα μέτρο Borel $\mu:\mathcal{B}(X)\to[0,+\infty]$ λέγεται κανονικό αν:

i) $\mu(K)<\infty$ για κάθε $K\subseteq X$ συμπαγές

ii) $\mu(B)=\inf\{\mu(U) : B\subseteq U,\ U \text{ ανοιχτό}\}$

iii) $\mu(B)=\sup\{\mu(K) : K\subseteq B,\ K \text{ συμπαγές}\}$

<u>Ορισμός</u>: Ένας μετρικός χώρος (X,d) λέγεται τοπικά συμπαγής αν $\forall x\in X$ υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. η $\overline{B(x,\varepsilon)}=\{y\in X : d(x,y)\le\varepsilon\}$ να είναι συμπαγής.

<u>Πρόταση</u>: Έστω X τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και μ κανονικό μέτρο Borel στον X. Τότε, το σύνολο

$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{K}, \ f$ συνεχής με συμπαγή φορέα$\}$ είναι πυκνό στον $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$, $1 \le p < \infty$.

* Φορέας της f: $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$

Απόδειξη: Έστω $f \in L^p$. Θέλουμε $\forall \varepsilon > 0$ να βρούμε $g_\varepsilon \in C_c(X)$ με $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Λόγω προηγούμενου αποτελέσματος (βλέπε αρχή διάλεξης), αρκεί να γίνει αυτό όταν η $f \in L^p$ είναι απλή. Έστω f απλή με $f(X) \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ και $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\})$.

Τότε, $f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ και αν $f \in L^p$,

τότε $\mu(A_j) < \infty \ \forall j$ (η $\mu(A_j) < \infty \ \forall j$ καθώς $\mu([f \neq 0]) = \mu(\bigcup_{i}^{k} A_j) = \sum_{i}^{k} \mu(A_j)$ και $\mu([f \neq 0]) < \infty$ από την υπόθεση της γνωστής πρότασης)

* με πεπ/νο μέτρο

φαίνεται λοιπόν ότι αρκεί να προσεγγίσουμε τις χαρακτηριστικές μετρήσιμων συνόλων* από στοιχεία του $C_c(X)$.

Πράγματι, αν $f_1, \dots, f_k \in C_c(X)$ τ.ω. $\| \chi_{A_j} - f_j \|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_1^k |\alpha_j|}$ $\forall j$, τότε παίρνονται το

$$\| f - \sum_1^k \alpha_j f_j \|_p = \| \sum_1^k \alpha_j (\chi_{A_j} - f_j) \|_p$$

$$\leq \sum_1^k |\alpha_j| \cdot \| f_j - \chi_{A_j} \|_p < \left(\sum_1^k |\alpha_j| \right) \frac{\varepsilon}{\sum_1^k |\alpha_j|} = \varepsilon .$$

Έστω $A \in \mathcal{A} \; (= \mathcal{B}(X))$ με $\mu(A) < \infty$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από κανονικότητα του μ υπάρχει U_ε ανοικτό τ.ω. $A \subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. (ιδιότητα infimum και $\mu(A) < \infty$) Επίσης, υπάρχει K_ε συμπαγές τ.ω. $K_\varepsilon \subseteq A$ και $\mu(A \setminus K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ (ιδιότητα supremum και $K_\varepsilon \subseteq A \Rightarrow \mu(K_\varepsilon) \leq \mu(A) < \infty$)

Τώρα, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $r_x > 0$ τ.ω. το $\overline{B(x, r_x)}$ να ιναι συμπαγές σύνολο. Για κάθε $x \in K_\varepsilon$, υπάρχει $\delta_x > 0$ τ.ω.

$B(x, \delta_x) \subseteq U_\varepsilon$ και $\delta_x < r_x$ $(K_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon)$

Από τη συμπάγεια του K_ε, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K_\varepsilon$ με $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\delta x_i}{2})$.

Έστω $V = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta x_i / 2)$ ανοικτό και $K_\varepsilon \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Τότε, το $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, \delta x_i /2)}$ είναι συμπαγές σύνολο και $\overline{V} \subseteq U_\varepsilon$.

Ορίζουμε $f(x) = \dfrac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, K_\varepsilon)}$.

Είναι $f(x) = 0$ για $x \in V^c$ και $f(x) = 1$ για $x \in K_\varepsilon$. Επίσης, $0 \le f \le 1$ $\forall x \in X$ και f συνεχής (συνέχεια της d) και $supp(f) \subseteq \overline{V}$, όπου $\overline{V}$ συμπαγές. Συνεπώς, $f \in C_c(X)$.

Έχουμε $\chi_{K_\varepsilon} \le f \le \chi_{U_\varepsilon}$. Επίσης, $\chi_{K_\varepsilon} \le \chi_A \le \chi_{U_\varepsilon}$ και άρα

$$|f - \chi_A|^p \le |\chi_{U_\varepsilon} - \chi_{K_\varepsilon}|^p \le \chi_{U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\|f - \chi_A\|_p \le \{\mu(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)\}^{1/p} < (\varepsilon)^{1/p}. \square$$

$*$ $\mu(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) = \mu(U_\varepsilon) - \mu(K_\varepsilon) = \mu(U_\varepsilon) - \mu(A) + \mu(A) - \mu(K_\varepsilon) = \mu(U_\varepsilon \setminus A) + \mu(A \setminus K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$

$= \varepsilon$.

* Πράγματι, αρκεί η περίπτωση που $f \in L^p$ απλή: Έστω $f \in L^p$ τυχαία (όχι απλή). Τότε, λόγω πυκνότητας των απλών, υπάρχει ακολουθία απλών $(f_n)_n$ στον L^p τ.ω. $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$.

Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ με $\|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Επίσης $\forall n \in \mathbb{N}$ και f_n απλή της ακολουθίας $\exists\, g^n_{\varepsilon/2} \in C_c(X)$ τ.ω.

$\|f_n - g^n_{\varepsilon/2}\|_p < \varepsilon/2$

Τότε, για $n \geq n_0$ είναι $\|f - g^n_{\varepsilon/2}\|_p \leq$
$\|f_n - f\|_p + \|f_n - g^n_{\varepsilon/2}\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

<u>Πρόταση</u>: Αν X μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο μέτρο Borel στον X τότε $\forall\, B \in \mathcal{B}(X)$ και $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει U_ε ανοικτό και F_ε κλειστό τ.ω. $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

θα αποδειχθεί.

<u>Εφαρμογές</u>

1) Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, μ πεπ/νο μέτρο Borel στον X. Τότε, το μ είναι κανονικό. Άρα, για κάθε συμπαγή μετρικό χώρο και πεπ/νο μέτρο Borel σ' αυτόν, οι συνεχείς με συμπαγή φορέα $C_c(X)$ είναι πυκνές στον $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$.

2) Το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $\lambda = \lambda_n$, είναι κανονικό. Επειδή ο $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής έχουμε ότι το $C_c(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνό στον $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, $1 \le p < \infty$.

Απόδειξη κανονικότητας του λ_n:

• Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές, τότε $\lambda_n(K) < \infty$ καθώς κάθε συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται σε ορθογώνιο πεπ/νου μέτρου.

• Κανονικό απ' έξω: Εξ ορισμού για το εξωτερικό μέτρο Lebesgue έχουμε ότι $\lambda_n^*(B) = \lambda_n(B)$ για $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, όπου $\lambda_n^*(B) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(U_i) : U_i$ ανοικτά ορθογώνια τ.ω. $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\}$.

Τότε, αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}_1^{\infty}$ του B τ.ω.

$$\lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(U_i) < \lambda_n(B) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lambda_n\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i}_{\text{ανοικτό}} \setminus B\Big) < \varepsilon$$

• Κανονικό από μέσα: Έστω X_k μια αρίθμηση των ορθογωνίων $[m_1, m_1+1] \times \ldots \times [m_k, m_k+1]$, $m_i \in \mathbb{Z}$.

Ορίζουμε $\mu_k(B) = \lambda_n(X_k \cap B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Δοθέντος B Borel υπάρχει F_k κλειστό τ.ω. $F_k \subseteq B \cap X_k$, $\mu_k(F_k) \geq \mu_k(B \cap X_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Είναι F_k συμπαγές και

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_n(F_k) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k(F_k) \geq \sum_{k=1}^{m} \mu_k(B \cap X_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_n(B \cap X_k) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} \xrightarrow{m \to \infty} \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap X_k)\Big) - \varepsilon.$$

Άρα, $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda_n(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} F_k}_{\text{συμπ.}}) = \lim\limits_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda_n(F_k) \geq$

$\geq \lambda_n(B) - \varepsilon$. Αφού αυτό γίνεται για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι

$$\lambda_n(B) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subseteq B,\ K \text{ συμπαγές}\}. \quad \square$$

<u>Απόδειξη πρότασης</u>: Έστω X μετρικός χώρος, μ πεπ/νο μέτρο Borel στον X και $B \in \mathcal{B}(X)$. Θέλουμε ν.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, U_\varepsilon$ ανοικτό, $\exists\, F_\varepsilon$ κλειστό τ.ω. $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) : \forall \varepsilon > 0\ \exists\, U_\varepsilon$ ανοικτό, $\exists\, F_\varepsilon$ κλειστό με $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \infty\}$. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:

- $X \in \mathcal{A}$ (πάρε $U_\varepsilon = F_\varepsilon = X$).

- Έστω $A \in \mathcal{A}$, θέλω ν.δ.ο. $A^c \in \mathcal{A}$. Έστω $\varepsilon > 0$, αφού $A \in \mathcal{A}$ υπάρχουν F_ε κλειστό, U_ε ανοικτό με $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Τότε, F_ε^c ανοικτό, U_ε^c κλειστό με $U_\varepsilon^c \subseteq A^c \subseteq F_\varepsilon^c$ και (μ πεπ/νο)

$\mu(F_\varepsilon^c \setminus U_\varepsilon^c) = \mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

- Τέλος, έστω $(A_i)_1^\infty \subseteq \mathcal{A}$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε i έστω F_i κλ., U_i αν. τ.ω.

$F_i \subseteq A_i \subseteq U_i$ και $\mu(U_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

Θέτω $U = \bigcup_1^\infty U_i$ και $F = \bigcup_1^n F_i$, $n \in \mathbb{N}$, ώστε U ανοικτό και F κλειστό τ.ω.

$\mu\left(\bigcup_1^\infty F_i \setminus \bigcup_1^n F_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ *Προσοχή το $n \in \mathbb{N}$ έχει επιλεχθεί κατάλληλα

Είναι $\bigcup_1^n F_i \nearrow \bigcup_1^\infty F_i \Rightarrow$

$\mu\left(\bigcup_1^n F_i\right) \nearrow \mu\left(\bigcup_1^\infty F_i\right)$

αύξουσα

* Η $\mu\left(\bigcup_1^\infty F_i\right) = \mu(F_1 \cup (F_1 \cup F_2) \cup \dots) =$

$= \lim_n \mu\left(\bigcup_1^n F_i\right) \Rightarrow$ για το $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

τ.ω. $\mu\left(\bigcup_{i}^{\infty} F_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i}^{n} F_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ για

κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $\mu\left(\bigcup_{i}^{\infty} F_i \setminus \bigcup_{i}^{n} F_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$

Και όπου χρειάζεται, λαμβάνουμε υπόψιν μας ότι μ πεπερασμένο //

Είναι $\underset{\text{κλειστό}}{F} = \bigcup_{1}^{n} F_i \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} A_i \subseteq \underset{\text{ανοιχτό}}{U}$.

Τότε, έχουμε ότι

$$\mu(U \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} U_i \setminus \bigcup_{1}^{n} F_i\right) =$$

$$= \mu\left(\left(\bigcup_{1}^{\infty} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{1}^{n} F_i^c\right)\right) =$$

$$= \mu\left(\left(\bigcup_{i}^{\infty} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i}^{\infty} F_i^c\right)\right) + \mu\left(\left(\bigcup_{i}^{\infty} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{i}^{n} F_i^c \setminus \bigcap_{i}^{\infty} F_i^c\right)\right)$$

$$\leq \mu\left(\bigcup_{i}^{\infty} (U_i \setminus F_i)\right) + \mu\left(\bigcap_{1}^{n} F_i^c \setminus \bigcap_{i}^{\infty} F_i^c\right) \leq$$

$$\leq \sum_{1}^{\infty} \mu(U_i \setminus F_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\bigcup_{1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Τελικά, η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$).

Δείχνοντας, ότι κάθε κλειστό $F \subseteq X$ ανήκει στην $\mathcal{A}$, θα έχουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ και τότε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ και θα έχουμε τελειώσει.

Έστω λοιπόν F κλειστό και $\varepsilon > 0$.

Παίρνουμε $F_\varepsilon = F$. Έστω $U_n = \{ x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n} \}$. Τότε, $U_n \searrow \bigcap_1^\infty U_n = F \Rightarrow$

$\mu(U_n) \searrow \mu(F)$ (μ-πεπ/νο). Για n αρκετά μεγάλο είναι U_n ανοικτό και

$\mu(F) \geq \mu(U_n) - \varepsilon \Rightarrow \mu(\underbrace{U_n \setminus F}_{= F_\varepsilon}) < \varepsilon$, άρα

$F \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(X) = \mathcal{A}$

και είμαστε ok. $\square$

// • $\bigcap_1^\infty U_n = F$: Έστω $x \in F \Rightarrow d(x, F) = 0 < 1/n \ \forall n \Rightarrow x \in U_n \ \forall n \Rightarrow$

$x \in \bigcap_1^\infty U_n \Rightarrow F \subseteq \bigcap_1^\infty U_n$. Έστω

$x \in \bigcap_1^\infty U_n \Rightarrow d(x, F) < 1/n \ \forall n \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in F$ με $d(x, y_n) \leq 1/n \xrightarrow{n} 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y_n \to x \\ F \text{ κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in F \Rightarrow F = \bigcap_1^\infty U_n$.

• $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \to \bigcap_1^\infty U_n = F \Rightarrow$

$\mu(F) = \mu(\bigcap_1^\infty U_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(U_n)$. Δηλ.

$\mu(U_1) \geq \mu(U_2) \geq \ldots \searrow \mu(F)$, άρα για το $\varepsilon > 0$ που έχει ήδη επιλεγχεί

και για κατάλληλα μεγάλο n

λαμβάνουμε ότι : $$\left.\begin{array}{r} \mu(U_n) - \mu(F) < \varepsilon \\ \mu(F) < \infty \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \mu(U_n \setminus F) < \varepsilon \; \ldots$ //