για το $\varepsilon>0$ που έχει ήδη επιλεχθεί

και για κατάλληλα μεγάλο n

λαμβάνουμε ότι : $\left.\begin{array}{l}\mu(U_n)-\mu(F)<\varepsilon \\ \mu(F)<\infty\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \mu(U_n \setminus F)<\varepsilon$ ... //

1-3-23

Έχουμε $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Χώροι Hilbert

Ορισμός: Ένας γραμμικός χώρος X επί σώματος $\mathbb{K}$ λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο αν υπάρχει συνάρτηση

$\langle\, ,\rangle : X\times X \to \mathbb{K}$ με

1) $\langle x,x\rangle \geq 0 \ \forall x\in X$ και $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$.

2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall x,y\in X$

3) $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$ $\forall x,y,z\in X$.

* Ορίζουμε επίσης $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in X$.

• Για X χώρο με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in X$ ισχύει η ανισότητα (Cauchy - Schwarz):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Θα αποδειχθεί παρακάτω.

<u>Πρόταση</u>: Έστω X δ.χ. με εσωτ. γιν. $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Τότε, η $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in X$ είναι νόρμα.

Απόδειξη: Είναι $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ $\forall x$ και $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Και $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} =$
$= \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Τέλος, $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle =$

$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} =$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \underset{C-S}{\leq}$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| =$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \Longrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \ \square$$

<u>Κανόνας παραλληλογράμμου</u>: Σε κάθε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο είναι:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Απόδειξη: Είναι $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$

$$= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle +$$

$$+ \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle =$$

$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \ \square$$

* Ο κανόνας του παρ/μου ικανοποιείται μόνο από νόρμες που προέρχονται από εσωτ. γιν.

<u>Παρατήρηση</u>: Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο, αυτό είναι συνεχής συνάρτηση ως προς τη νόρμα.

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ακολουθίες στον X με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \|x_n - x\| &\xrightarrow{n} 0 \\ \|y_n - y\| &\xrightarrow{n} 0 \end{aligned}\right\}$$

Είναι $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| =$

$$= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| =$$

$$= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \underset{C-S}{\leq}$$

$$\leq \|x_n\|\cdot\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\cdot\|y\| \xrightarrow{n} \|x\|\cdot 0 + 0\cdot\|y\|$$

$$= 0.$$

* Χρησιμοποίησα ότι $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \xrightarrow{n} 0$.

□

<u>Ορισμός</u>: Ένας χώρος $(X, \langle,\rangle)$ καλείται Hilbert αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που επάγεται απ' το $\langle,\rangle$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος με εσωτ. γιν. και $x, y \in X$. Τα x, y λέγονται κάθετα ή ορθογώνια, αν $\langle x, y \rangle = 0$.

Για M γραμμικό υπόχωρο του X, ορίζουμε το $M^{\perp} = \{ y \in X : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M \}$

Ισχύει ότι $M^{\perp}$ γραμμικός υπόχωρος του X. (εύκολο)

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Είναι $0 \perp x \ \forall x \in X$: $\langle 0, x \rangle = \langle x - x, x \rangle =$
$= \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle = 0$

2) Το $0 \in X$ είναι το μόνο στοιχείο μ' αυτή την ιδιότητα: Αν $x \in X \setminus \{0\}$ και $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall y$, τότε για $y = x$ λαμβάνουμε ότι $\langle x, x \rangle = 0$
$\Rightarrow x = 0$.

3) Αν $x, y \in X$ με $\langle x, y \rangle = 0$, τότε εύκολα δείχνεται ότι $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

↖ Πυθαγόρειο θεώρημα

<u>Θεώρημα</u> (ορθογώνια προβολή): Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος και $x \in H$. Τότε, υπάρχει μοναδικό $y \in M$ τ.ω. $\|x-y\| = dist(x, M) =$
$= \min\{\|x-z\| : z \in M\}$.

Αυτό το $y \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$ και λέγεται προβολή του x στον M.
Επιπλέον, $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

* Γράψαμε min και όχι inf καθώς η απόσταση υλοποιείται.

Απόδειξη: Έστω $(y_n)_n$ ακολουθία στον M τ.ω. $\|x - y_n\| \xrightarrow{n} \delta := \inf\{\|x-z\| : z \in M\}$.
Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|(x-y_m) - (x-y_n)\|^2 =$$

$$= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2 =$$

$$= 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\|x - \underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{\in M}\|^2 \leq$$

$$\leq 2\cdot\|x-y_m\|^2 + 2\cdot\|x-y_n\|^2 - 4\cdot\delta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{m\to+\infty}$$

$2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$.

Δηλαδή $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \|y_n - y_m\| = 0$. Έπεται ότι η $(y_n)_n \subseteq M \leq H$ είναι Cauchy και καθώς ο H είναι Hilbert έχουμε ότι η $(y_n)_n$ είναι συγκλίνουσα. Επιπλέον, αφού ο M είναι κλειστός, έπεται ότι $\exists\, y \in M$ με $y_n \longrightarrow y$.

Τότε, καταλήγουμε ότι $\|x - y\| = \|x - \lim_n y_n\|$

$= \|\lim_n (x - y_n)\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$

συνέχεια της νόρμας

"Σ' αυτό το σημείο φαίνεται ότι το δ που είναι infimum, γίνεται minimum"

Για την μοναδικότητα: Έστω $y' \in M$ τ.ω. $\|x - y'\| = \delta$. Απ' τον κανόνα του παρ/μου έχουμε $\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \Rightarrow y' = y$.

Είναι δηλαδή $y = P_M(x)$ και μένει ν.δ.ο. $x - P_M(x) \in M^\perp$.

Έστω $z = x - P_M(x)$ και $w \in M$ τυχαίο.

Τότε, $\langle z, w \rangle = |\langle z, w \rangle| e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in \mathbb{R}$

και $\|z - te^{i\vartheta} \cdot w\|^2 = \|z\|^2 + t^2 \cdot \|w\|^2$

$- t\,\overline{e^{i\vartheta}} \langle z, w \rangle - t\, e^{i\vartheta}\, \overline{\langle z, w \rangle} =$

$= \|z\|^2 + t^2 \cdot \|w\|^2 - t\left(e^{-i\vartheta} \langle z, w \rangle - \overline{e^{-i\vartheta} \langle z, w \rangle} \right)$

$= \|z\|^2 + t^2 \cdot \|w\|^2 - t \cdot 2\,\mathrm{Re}\left(\langle z, w \rangle e^{-i\vartheta} \right) =$

$= \|z\|^2 + t^2 \cdot \|w\|^2 - 2t \cdot |\langle z, w \rangle|$

Καθώς $w \in M$, έχουμε ότι

$$\|z - te^{i\vartheta} \cdot w\|^2 = \|x - \underbrace{P_M(x) - te^{i\vartheta} \cdot w}_{\in M}\|^2 \geq$$

$\|x - P_M(x)\|^2 = f(0)$

για $f(t) = \|z\|^2 + t^2 \cdot \|w\|^2 - 2t|\langle z, w \rangle| =$

$= \|z - te^{i\vartheta} \cdot w\|^2$.

Δηλαδή, το τριώνυμο $f(t)$ ελαχιστοποιείται

στο 0, άρα $f'(0) = 0 \Rightarrow \left(2t \cdot \|w\| - 2|\langle z, w \rangle|\right)\Big|_{t=0}$

$= 0 \Rightarrow |\langle z, w \rangle| = 0 \Rightarrow \langle z, w \rangle = 0$ και

αφού το w ήταν τυχαίο στοιχείο του M

έπεται ότι $Z = x - P_M(x) \in M^\perp$. $\square$

<u>Πόρισμα 1ο</u>: Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του, τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $x = x' + x''$, όπου $x' \in M$ και $x'' \in M^\perp$.

Δηλαδή, $H = M \oplus M^\perp$

Απόδειξη: Για $x \in H$ θεωρούμε $x' = P_M(x) \in M$ και $x'' = x - P_M(x) \in M^\perp$.

Για τη μοναδικότητα, αν $x = x' + x'' = y' + y''$ με $x', y' \in M$ και $x'', y'' \in M^\perp$, τότε

$$x' - y' + x'' - y'' = 0 \Rightarrow \|\underbrace{(x'-y')}_{\in M} + \underbrace{(x''-y'')}_{\in M^\perp}\|^2 = 0$$

$$\underset{\text{Π.Θ.}}{\Rightarrow} \|x'-y'\|^2 + \|x''-y''\|^2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = y' \\ x'' = y'' \end{array}\right\}. \square$$

<u>Πόρισμα 2ο</u>: Έστω H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του, $M \neq H$.
Τότε, υπάρχει $x \in H \setminus \{0\}$ με $x \in M^\perp$.

Απόδειξη: Έστω $y \in H \setminus M$. Τότε, $y \neq 0$

και ορίζουμε $x = y - P_M(y) \in M^{\perp}$. Είναι $x \neq 0$ καθώς $y \notin M$. □

Το 2ο πόρισμα μας λέει ότι για κάθε γνήσιο, κλειστό υπόχωρο ενός χώρου Hilbert, M, υπάρχει ο $M^{\perp}$ (μη τετριμμένος)

Γραμμικά συναρτησοειδή

Έστω H χώρος Hilbert. Αν $a \in H$ τότε το $\phi_a(x) = \langle x, a \rangle$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές (έλεγχος).

Είναι και φραγμένο καθώς $|\phi_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \cdot \|a\|$, $x \in H$ και μάλιστα $\|\phi_a\| \leq \|a\|$. Επιπλέον, για $a \neq 0$ και $x = \frac{a}{\|a\|}$, $|\phi_a(x)| = |\langle \frac{a}{\|a\|}, a \rangle| = \|a\|$, άρα $\|\phi_a\| \geq \|a\|$ και τελικά $\|\phi_a\| = \|a\|$.

Από την παραπάνω μελέτη, αναφίεται απεικόνιση $T : H \to H^*$ με $T(a) = \phi_a$.

Όπως παρατηρήσαμε, η T είναι ισομετρία.

Μάλιστα, η T είναι αντιγραμμική, δηλ.
$T(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} T(a) + \bar{\mu} \cdot T(b)$.

<u>Θεώρημα Riesz</u>: Έστω H χώρος Hilbert και $\phi \in H^*$, τότε υπάρχει $a \in H$ με $\phi = \phi_a = T(a)$, δηλαδή $\phi(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in H$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $\ker\phi = \{x \in H : \phi(x) = 0\}$. Ο $\ker\phi$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Αν $\ker\phi = H$, τότε $\phi = 0$, άρα παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε τελειώσει.

Αν $\ker\phi \neq H$ τότε υπάρχει $z \in H \setminus \{0\}$ με $z \in \ker\phi^\perp$ και $\|z\| = 1$.
χβγ κανονικοποιούμε

Τότε, για $y \in H$ λαμβάνουμε ότι

$$\phi(z)\phi(y) - \phi(y)\phi(z) = 0 \Rightarrow \phi(z \cdot \phi(y) - y\phi(z)) =$$

$$= 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} z\phi(y) - y\phi(z) \in \ker\phi \\ z \in \ker\phi^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\langle z, z\phi(y) - y\phi(z) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$\langle z\phi(y) - y\phi(z), z\rangle = 0 \Rightarrow$

$\phi(y)\overbrace{\langle z, z\rangle}^{1} - \phi(z)\langle y, z\rangle = 0 \Rightarrow$

$\phi(y) = \phi(z)\langle y, z\rangle = \langle y, \overline{\phi(z)}\cdot z\rangle$ και αφού το $y \in H$ επιλέχθηκε τυχαία, για $a = \overline{\phi(z)}\cdot z \in H$, λαμβάνουμε ότι

$\phi = \phi_a = \phi_{\overline{\phi(z)}\cdot z}$.

* Μάλιστα, για $\phi \in H^*$, $\phi = \phi_a$, το $a \in H$ είναι μοναδικό:

Έστω επιπλέον ότι $\phi(y) = \langle y, b\rangle$ για κάποιο $b \in H$. Τότε, $\forall y \in H$ είναι $\langle y, b\rangle = \langle y, a\rangle$ $\Rightarrow \langle y, b-a\rangle = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow a = b$. □