Οι χώροι ℓ^∞ και $\ell^\infty(\Gamma)$ για $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο. (1)

$$\ell^\infty(\Gamma) = \{ f : \Gamma \to \mathbb{R} : f \text{ φραγμένη συνάρτηση} \}$$

Ορισμός

(1) Μια συνάρτηση $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$|f(x)| \leq \theta \quad \text{για κάθε } x \in \Gamma.$$

Προφανώς, αν $f, g \in \ell^\infty(\Gamma)$ με $|f(x)| \leq \theta$, $|g(x)| \leq \eta$ $\forall x \in \Gamma$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda f + \mu g : \Gamma \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \ell^\infty$, διότι: για κάθε $x \in \Gamma$

$$(*) \quad |\lambda f + \mu g\, (x)| = |\lambda f(x) + \mu g(x)| =$$
$$= |\lambda| \cdot |f(x)| + \mu |g(x)| \leq |\lambda| \cdot \theta + |\mu| \cdot \eta .$$

Άρα, προφανώς ο $\ell^\infty(\Gamma)$ είναι διανυσματικός χώρος και μάλιστα απειροδιάστατος αν το Γ είναι άπειρο σύνολο, καθώς οι συναρτήσεις $f_\gamma : \Gamma \to \mathbb{R}$ με $f_\gamma(x) = 0$ αν $x \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$ και
$$f_\gamma(\gamma) = 1$$
για κάθε $\gamma \in \Gamma$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θέτουμε για κάθε $f \in \ell^\infty(\Gamma)$

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)| : x \in \Gamma \} \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα, καθώς για κάθε $f, g \in \ell^\infty(\Gamma)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν:
(i) $\|f\|_\infty \geq 0$, (ii) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$, (iii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ και
(iv) $\|f+g\|_\infty = \sup\{ |f(x)+g(x)| : x \in \Gamma \} \leq$
$\sup\{ |f(x)| : x \in \Gamma \} + \sup\{ |g(x)| : x \in \Gamma \} = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$

Άρα, $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ χώρος με νόρμα

(2) Ο $\ell^\infty(\Gamma)$ είναι χώρος Banach.

Θα αποδείξουμε ότι ο αντίστοιχος μετρικός χώρος $(\ell^\infty(\Gamma), d_\infty)$, όπου

$$d_\infty(f, g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in \Gamma \} = \|f - g\|_\infty$$

είναι πλήρης μετρικός.

Πράγματι, έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\Gamma)$ βασική ακολουθία. (2)

Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\forall n, m \geq n_0$

(*) $$d_\infty(f_n, f_m) = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in \Gamma\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, για κάθε $x \in \Gamma$ έχουμε ότι η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ βασική.

Έστω $f_n(x) \to f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in \Gamma$.

Έστω η συνάρτηση $f : \Gamma \to \mathbb{R} : x \to f(x)\ \forall x \in \Gamma$.

Τότε $d_\infty(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \Gamma\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, σύμφωνα με την (*) (όριο ως προς m).

Άρα, $d_\infty(f_n, f) \to 0$ και ακολούθως $f_n \to f \in \ell^\infty$.

Επομένως ο $(\ell^\infty(\Gamma), d_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και άρα, ο $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ είναι χώρος **Banach**, με νόρμα:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}.$$

<u>Ορισμός</u>

Συμβολίζουμε με ℓ^∞ τον χώρο $\ell^\infty(\mathbb{N})$ δηλαδή τον χώρο όλων των φραγμένων ακολουθιών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\}$$

που είναι **απειροδιάστατος** γραμμικός χώρος με νόρμα:

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Ο $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ είναι χώρος **Banach**.

Παρατήρηση

Ο χώρος $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το σύνολο Γ είναι πεπερασμένο.
Άρα, ο χώρος ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη

Έστω ότι το σύνολο Γ είναι άπειρο. Τότε το σύνολο $\mathcal{P}(\Gamma)$ όλων των υποσυνόλων του Γ είναι υπεραριθμήσιμο.
Για κάθε $A \in \mathcal{P}(\Gamma)$, δηλαδή $A \subseteq \Gamma$, θέτουμε $x_A : \Gamma \to \mathbb{R}$ την χαρακτηριστική συνάρτηση του A, δηλαδή $x_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $x_A(x) = 0$ αν $x \in \Gamma \setminus A$.

Προφανώς, $x_A \in \ell^\infty(\Gamma)$ $\forall A \in \mathcal{P}(\Gamma)$.
Επίσης, αν $A, B \in \mathcal{P}(\Gamma)$ και $\boxed{A \neq B}$ τότε

$$\sup\{|x_A(x) - x_B(x)| : x \in \Gamma\} = \boxed{\|x_A - x_B\|_\infty = 1},$$

άρα

$$S(x_A, \tfrac{1}{3}) \cap S(x_B, \tfrac{1}{3}) = \phi \quad \forall A \neq B$$

Επομένως κάθε πυκνό υποσύνολο D του $\ell^\infty(\Gamma)$ είναι υπεραριθμήσιμο, διότι

$$D \cap S(x_A, \tfrac{1}{3}) \neq \phi \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Gamma)$$

και το σύνολο

$$\{S(x_A, \tfrac{1}{3}) : A \in \mathcal{P}(\Gamma)\}$$

περιέχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ξένων ανά δύο σφαιρών, ίσο με το πλήθος του $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Αν το Γ είναι πεπερασμένο σύνολο τότε $\boxed{\ell^\infty(\Gamma) = \mathbb{R}^\Gamma}$ και άρα ο $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος, αφού ο $(\mathbb{R}^\Gamma, \|\cdot\|_\infty)$ είναι διαχωρίσιμος, ως ισοδύναμος με τον $(\mathbb{R}^\Gamma, \|\cdot\|_2)$.

Ο συζυγής χώρος $(\ell^1)^*$ είναι ισομετρικός με τον χώρο ℓ^∞. (4)

Απόδειξη

Αν $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ και $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ συγκλίνει, διότι:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\cdot y_n|\leq \|(x_n)\|_\infty \cdot \|(y_n)\|_1}$$ (προφανώς).

Για κάθε $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$ θέτουμε:

$$T_x:\ell^1\to\mathbb{R} \text{ με } \boxed{T_x(y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n \ \forall\, y=(y_n)\in\ell^1}$$

Προφανώς T_x είναι γραμμικός τελεστής και ισχύει:

$$|T_x(y)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n\right|\leq \|(x_n)\|_\infty\cdot\|(y_n)\|_1 \quad (*)$$

για κάθε $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$.

Άρα, ο T_x είναι φραγμένος τελεστής και μάλιστα $\|T_x\|\leq\|x\|_\infty$, άρα $T_x\in(\ell^1)^*\ \forall\, x\in\ell^\infty$.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$T:\ell^\infty\to(\ell^1)^* \text{ με } T(x)=T_x \ \forall\, x=(x_n)\in\ell^\infty$$

Η συνάρτηση T είναι γραμμικός τελεστής και μάλιστα ισομετρία, διότι:

από την $(*)$ έχουμε:

$$\|T_x\|\leq\|(x_n)\|_\infty \quad \forall\, x=(x_n)\in\ell^\infty$$

και επίσης

$$\|(x_n)\|_\infty\leq\|T_x\| \quad \forall\, x=(x_n)\in\ell^\infty$$

διότι

$$|T_x(e_n)|=|x_n|\leq\|T_x\| \quad \forall\, x=(x_n)\in\ell^\infty,$$

όπου, $e_n=(0,\dots,\underset{n\text{-θέση}}{1},0,\dots)\in\ell^1$

και $\|e_n\|_1=1$

Πρόταση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $Y \subsetneq X$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του X. Αν το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X τότε ο $(Y, \|\cdot\|/_Y)$, δηλαδή ο Y με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ στο Y είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

Προφανώς ο $(Y, \|\cdot\|/_Y)$ είναι χώρος με νόρμα.

Αν $(y_n) \subseteq Y$ μια Cauchy ακολουθία, τότε $\forall\, \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:
$\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0$.

$$(*) \quad \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

Άρα, η $(y_n) \subseteq X$ είναι Cauchy ακολουθία και στον $(X, \|\cdot\|)$.

Αφού ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach υπάρχει $x \in X$ ώστε: $y_n \to x \iff \|y_n - x\| \to 0$.

Ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X και $(y_n) \subseteq Y$, άρα $x \in Y$.

Επομένως $y_n \to x \in Y$, άρα ο $(Y, \|\cdot\|/_Y)$ είναι χώρος Banach.

9ο μάθημα

Ο χώρος c_0

$$c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subseteq \ell^\infty$$
$$= \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > \varepsilon\} \text{ πεπερασμένο } \forall \varepsilon > 0\}$$

Ο χώρος c_0 είναι προφανώς διανυσματικός χώρος, υπόχωρος του ℓ^∞, διότι $\lambda(x_n) + \mu(y_n) \in c_0$ αν $(x_n),(y_n) \in c_0$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Ο χώρος $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Πράγματι, είναι άμεσο ότι ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.

Ο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach, καθώς είναι **κλειστό** υποσύνολο του χώρου $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ που είναι χώρος Banach.

Πράγματι, το σύνολο $\boxed{\ell^\infty \setminus c_0}$ είναι $\boxed{\text{ανοικτό}}$ υποσύνολο του ℓ^∞:

Για κάθε $x = (x_n) \in \ell^\infty \setminus c_0$, ισχύει $x \notin c_0$ άρα $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ με $k_n \geq n$ ώστε $\boxed{|x_{k_n}| > \varepsilon.}$

Άρα, για κάθε $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ με $\boxed{\|x-y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}}$ ισχύει: $\boxed{|y_{k_n}| > \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}}$. $y \in \ell^\infty \setminus c_0$

διότι $\varepsilon - |y_{k_n}| < |x_{k_n}| - |y_{k_n}| < |x_{k_n} - y_{k_n}| < \|x-y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Επομένως $y \in \ell^\infty \setminus c_0$ και $S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \ell^\infty \setminus c_0$.

Ο συζυγής χώρος c_0^* του c_0 είναι ισομετρικός με τον χώρο ℓ^1.

Θέτουμε: για $x = (x_n) \in \ell^1$: $\boxed{T_x : c_0 \to \mathbb{R} \text{ με } T_x(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n}$

$\forall y = (y_n) \in c_0$. Τότε $|T_x(y)| \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty \quad \forall x \in \ell^1, y \in c_0$

Άρα, $T_x \in c_0^*$, $\forall x \in \ell^1$.

Ο Τελεστής $\boxed{T : \ell^1 \to (c_0)^* \quad με \quad T(x) = T_x}$ (7)
$\forall\, x \in \ell^1$ είναι ισομετρία:

ισχύει

Έχουμε $\boxed{\|T(x)\| = \|T_x\| \leq \|x\|_1}$ $\forall\, x \in \ell^1$

Έστω $\boxed{x = (x_n) \in \ell^1}$. Θέτουμε:

$$z_n^m = \begin{cases} \dfrac{|x_n|}{x_n} & \text{αν } n \leq m \text{ και } x_n \neq 0 \\ 0 & \text{αν } n > m \text{ ή } x_n = 0 \end{cases}$$

Ισχύει: $\|z_n^m\|_\infty = 1$ και

$$\|T_x(z^{(m)})\| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n^m\right| = \sum_{n=1}^{m} |x_n|.$$

Άρα $\|T_x\| \geq \sum_{n=1}^{m} |x_n|$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ και επομένως

$$\boxed{\|T_x\| \geq \|x\|_1.}$$

Άρα, $\|T_x\| = \|x\|$ $\forall\, x \in \ell^1$ και επομένως ο τελεστής $T : \ell^1 \to (c_0)^*$ με $T(x) = T_x$ $\forall\, x \in \ell^1$ είναι ισομετρία.