6ο Μάθημα

Παραδείγματα χώρων Banach 1

Πεπερασμένα γινόμενα χώρων Banach

Όπως αναφέραμε ένας γραμμικός χώρος $(X,+,\cdot)$ είναι πεπερασμένης διάστασης $k\in\mathbb{N}$, αν υπάρχουν $x_1,\dots,x_k\in X$ που είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**:

δηλαδή $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k=0 \iff \lambda_1=\dots=\lambda_k=0 \quad \forall \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,

και $x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k$ για (μοναδικά) $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$.

Τα στοιχεία $x_1,\dots,x_k$ του X ονομάζονται (αλγεβρική) **βάση** του X και το $k\in\mathbb{N}$ είναι η **διάσταση** του X.

Παραδείγματα

1. Ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^k$, $k\in\mathbb{N}$, με τις πράξεις

$(x_1,\dots,x_k)+(y_1,\dots,y_k)=(x_1+y_1,\dots,x_k+y_k)$ (πρόσθεση)

$\lambda\cdot(x_1,\dots x_k)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_k)$ (αριθμητικός πολ/σμός)

είναι γραμμικός χώρος, θέτοντας:

$\vec{0}=(0,\dots,0)$ και $-x=(-x_1,\dots,-x_k)\ \forall (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}$

Ο $(\mathbb{R}^k,+,\cdot)$ είναι γραμμικός χώρος διάστασης $k\in\mathbb{N}$, διότι τα $e_1,\dots,e_k\in\mathbb{R}^k$, όπου για $1\le i\le k$ $e_i=(e_i^1,\dots e_i^k)\in\mathbb{R}^k$ και $e_i^k=0$ αν $i\neq k$ και $e_i^i=1$,

(α) είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ke_k=\vec{0}\iff(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=(0,\dots,0)\iff$

$\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$, και

(β) κάθε $x=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ γράφεται ως άθροισμα $x_1e_1+\dots+x_ke_k$.

Άρα τα $e_1,\dots,e_k$ είναι βάση του $\mathbb{R}^k$ και ο $\mathbb{R}^k$ είναι διάστασης $k\in\mathbb{N}$.

Στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^k$, $k\in\mathbb{N}$, ορίζονται οι νόρμες: $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2,\dots$, γενικά η $\|\cdot\|_p\ \forall 1\le p\le\infty$

Θέτουμε:

$$\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_k|\},$$

$$\|(x_1,\dots,x_k)\|_1 = |x_1|+\dots+|x_k|$$

$$\|(x_1,\dots,x_k)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_k|^2}$$

Γενικά

$$\|(x_1,\dots,x_k\|_p = \left(|x_1|^p+\dots+|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, 1\le p\le +\infty$$

Οι συναρτήσεις $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $\forall\, 1\le p<+\infty$ είναι **νόρμες** στον $\mathbb{R}^k$ καθώς για κάθε $x=(x_1,\dots x_k)$ και $y=(y_1,\dots,y_k)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^k$ ισχύουν:

(i) $\|x\|_p \geq 0$,
(ii) $\|x\|_p = 0 \Rightarrow x=\vec{0}=(0,\dots,0)$, και
(iii) $\|\lambda x\|_p = (|\lambda x_1|^p+\dots+|\lambda x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\,(|x_1|^p+\dots+|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} =$
$= |\lambda|\,\|x\|_p \quad \forall\, 1\le p<\infty,\ \lambda\in\mathbb{R}.$

(iv) $\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$
$\le \|x\|_p + \|y\|_p, \quad \forall\, 1\le p<\infty$
από την ανισότητα Minkowski

Η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ είναι νόρμα στο $\mathbb{R}^k$, καθώς για κάθε $x=(x_1,\dots,x_k),(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k$ ισχύουν:

(i) $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_k|\}\geq 0$
(ii) $\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow x=\vec{0}$
(iii) $\|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda||x_1|,\dots,|\lambda||x_n|\} = |\lambda|\cdot\|x\|_\infty$, και
(iv) $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|,\dots,|x_n+y_n|\} \le$
$\le \max\{|x_1|+|y_1|,\dots,|x_n|+|y_n|\} \le$
$\max\{|x_1|+\dots+|x_n|\} + \max\{|y_1|+\dots+|y_n|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$

Θα αποδείξουμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ στον $\mathbb{R}^k$ είναι ισοδύναμες $\forall\, 1\le p\le+\infty$.

Όπως αναφέραμε δύο νόρμες $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ ενός χώρου X είναι **ισοδύναμες** αν η ταυτοτική συνάρτηση $I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή υπάρχουν $m, M\geq 0$ ώστε

$$\boxed{m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1} \quad \forall\, x\in X.$$

Πρόταση Οι νόρμες $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^k \to [0,+\infty)$ είναι ισοδύναμες για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$.

Απόδειξη

Για κάθε $(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k$ ισχύει: $\forall 1 \leq p < \infty$

$$\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty \leq \|(x_1,\dots,x_k)\|_p \leq k \cdot \|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty$$

διότι:

$$\underline{\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty} = \max\{|x_1|,\dots,|x_k|\} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\underline{\|(x_1,\dots x_k)\|_p} \leq k \cdot \max\{|x_1|,\dots,|x_k|\} = \underline{k\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty}.$$

Άρα κάθε νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι ισοδύναμη με την νορμα $\|\cdot\|_\infty$, επομένως και μεταξύ τους οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ για $1 \leq p < \infty$ είναι ισοδύναμες.

Πρόταση

Οι χώροι $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$ είναι χώροι Banach για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$.

Απόδειξη

Ο Ευκλείδιος χώρος $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Banach, διότι ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$, όπου $\rho_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k}|x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ είναι πλήρης.

Πράγματι, αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι βασική, όπου $x_n = (x_n^1,\dots,x_n^k)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε οι ακολουθίες $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ είναι βασικές ακολουθίες του $\mathbb{R}$ για κάθε $i = 1,\dots,k$.

Αφού ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος $x_n^i \longrightarrow x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1,\dots,k$.

Θέτουμε $x = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k$. Τότε $x_n \to x \in \mathbb{R}^k$

Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $i \in \{1,\dots,k\}$ υπάρχει $n(i) \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ $\forall n \geq n(i)$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n(1),\dots,n(k)\}$ και έχουμε

$$\forall n \geq n_0, \rho_2(x_n,x) = \|x_n - x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k}|x_n^i - x^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(k\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

Άρα, $\rho_2(x_n,x) = \|x_n - x\|_2 \longrightarrow 0$ και τελικά $x_n \to x$.

Επομένως, ο χώρος $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Banach.

Για κάθε $1\leq p\leq +\infty$ οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ του $\mathbb{R}^k$ είναι ισοδύναμες και αφού ο χώρος $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2)$ είναι Banach, και οι χώροι $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$ είναι Banach $\forall\ 1\leq p\leq +\infty$.

Παράδειγμα 2 (γενικότερα)

Έστω $X_1,\dots,X_n$ χώροι με νόρμα και $X=X_1\times\dots\times X_n$ το καρτεσιανό γινόμενό τους.

Προφανώς το σύνολο X με τις πράξεις:

$$+ : X\times X\to X \text{ με } (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R}\times X\to X \text{ με } \lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

είναι γραμμικός χώρος (άσκηση).

Θέτοντας:

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ 1\leq p<\infty$$

και $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty=\max\{\|x_k\| : 1\leq k\leq n\}$

για κάθε $(x_1,\dots,x_n)\in X$, έχουμε ότι

$(X=X_1\times\dots\times X_n, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα για κάθε $1\leq p\leq +\infty$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι ισχύουν προφανώς οι ιδιότητες (i), (ii) και (iii) της νόρμας και η ιδιότητα (iv) αποδεικνύεται από την ανισότητα Minkowski: Έστω $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in X_1\times\dots\times X_n$ $\forall\ 1<p<\infty$.

$$\|(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\|_p=\|(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\|_p=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k+y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}(\|x_k\|+\|y_k\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(\text{Minkowski})$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|(x_1,\dots,x_k)\|_p+\|(y_1,\dots,y_k)\|_p.$$

Άρα, $(X, \|\ \|_p)$ χώρος με νόρμα. $\forall\ 1\leq p<\infty$

$$\|(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\|_\infty=\max\{\|x_1+y_1\|,\dots,\|x_n+y_n\|\}\leq$$

$$\max\{(\|x_1\|+\|y_1\|),\dots,(\|x_n\|+\|y_n\|)\}\leq$$

$$\max\{\|x_1\|,\dots,\|x_n\|\}+\max\{\|y_1\|,\dots,\|y_n\|\}=$$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty+\|(y_1,\dots,y_n)\|_\infty.$$

Άρα, $(X, \|\ \|_\infty)$ χώρος με νόρμα

Οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ $\forall 1\leq p\leq\infty$ είναι ισοδύναμες στον X, καθώς όλες είναι ισοδύναμες με την $\|\cdot\|_\infty$.
Πράγματι,
$\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty \leq \|(x_1,\dots,x_k)\|_p \leq k\|(x_1,\dots,x_k)\|_\infty$.

Ο χώρος αυτός συμβολίζεται με $(X_1\oplus\dots\oplus X_k)_p$ και είναι χώρος Banach $\forall 1\leq p\leq\infty$ αν οι χώροι $(X_1,\|\cdot\|_1),\dots,(X_n,\|\cdot\|_n)$ είναι χώροι Banach.

Απόδειξη

Έστω $(x_1^n,\dots,x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq(X_1\oplus\dots\oplus X_k)_p$ για βασική ακολουθία, για $1\leq p\leq\infty$.
Τότε οι ακολουθίες $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X_i$ είναι βασικές για κάθε $i=1,\dots,k$. Αφού οι χώροι $(X_i,\|\cdot\|_i)$ είναι Banach: $\forall i=1,\dots,n$, $x_i^n\to x_i\in X_i$ $\forall i=1,\dots n$.
ισοδύναμα $\|x_i^n-x_i\|_p\to 0$ $\forall$ $i=1,\dots,k$.

Επομένως, θέτοντας $x=(x_1,\dots,x_n)\in X_1\oplus\dots\oplus X_n$ έχουμε $\|(x_1^n-x_1),\dots,(x_k^n-x_k)\|_p\to 0$ και άρα $(x_1^n,\dots,x_k^n)\to(x_1,\dots,x_k)\in X_1\oplus\dots\oplus X_k$ ως προς την νορμα $\|\cdot\|_p$, $1\leq p\leq\infty$.
Άρα, ο $(X_1\oplus\dots\oplus X_k)_p$ είναι χώρος Banach για καθε $1\leq p\leq+\infty$.

Άσκηση

Ολοκληρώστε την απόδειξη και δώστε παραδείγματα.