Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Θέτουμε
$\mathcal{L}(X,Y) = \{T: X \to Y : T$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής$\}$
Ορίζοντας:
για $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:
$T+S: X \to Y$, όπου $(T+S)(x) = T(x)+S(x) \quad \forall x \in X$
και $\lambda T: X \to Y$, όπου $(\lambda T)(x) = \lambda \cdot T(x) \quad \forall x \in X$.

Τότε $T+S$, λT είναι γραμμικοί τελεστές και φραγμένοι, διότι: για $x \in X$

$$\|(T+S)(x)\| = \|T(x)+S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq$$
$$\leq \|T\|.\|x\| + \|S\|\|x\| \leq (\|T\|+\|S\|).\|x\|$$

Άρα, $T+S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\underline{\|T+S\| \leq \|T\|+\|S\|}$.

Επίσης, για $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\|\lambda T(x)\| = |\lambda|\,\|T(x)\| \leq |\lambda|\,\|T\|\,\|x\|$$

Άρα, $\lambda T \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\,\|T\|$

Το σύνολο $\mathcal{L}(X,Y) \subseteq L(X,Y) = \{T: X \to Y : T$ γραμμικός τελεστής$\}$ είναι γραμμικός χώρος, διότι ο $L(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, όπως αποδείξαμε και για κάθε $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ $T+S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda T \in \mathcal{L}(X,Y)$ για κάθε $T,S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Πρόταση</u> Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ είναι γραμμικός, φραγμένος τελεστής Ισχύουν οι ισότητες:

$$0 \leq \|T\| = \inf\{M>0 : \|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x \in X\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} =$$
$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\} =$$
$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

<u>Απόδειξη</u>

$$0 \leq \|T\| = \inf\{M>0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\} =$$
$$= \inf\left\{M>0 : \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M \ \forall x \in X, x \neq 0\right\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} =$$
$$= \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\} =$$
$$\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} = a \in \mathbb{R}.$$

($T(0)=0$, άρα $\|T(0)\| \leq M\|0\| = 0$ $\forall M>0$) δεν επηρεάζει το inf το $x=0$

Θα αποδείξουμε ότι $\|T\| = a$.

Ισχύει $\|T\| \leq a$.

Έστω $\|T\| < a$.

Τότε υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\boxed{\|T\| < \beta < a}$.

Αφού $\beta < a = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ ώστε $\boxed{\beta < \|T(x)\|}$.

υπάρχει $x \in X$ ώστε:

Επομένως, υπάρχει $x \in X$ ώστε
$$\beta\|x\| \leq \beta < \|T(x)\|,$$
διότι ($\|x\| \leq 1$ και $\beta < \|T(x)\|$).

Άτοπο! διότι $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| < \beta \cdot \|x\|$ $\forall x \in X$ (διότι $\|T\| < \beta$)

Επομένως, ισχύει $\|T\| = a$ και τελικά όλες οι ισότητες που περιγράφονται ισχύουν.

<u>Πρόταση</u> Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι φραγμένος, ($\|T\| < \infty$)
(ii) Ο $T: X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(iii) Ο T είναι συνεχής.
(iv) Ο T είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in X$.

<u>Απόδειξη</u>
(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι ο T είναι φραγμένος.
Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι:
$$\|T(x-y)\| \leq \|T\| \cdot \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X.$$
Άρα, ο τελεστής T είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) και (iii) $\Rightarrow$ (iv) ισχύουν προφανώς.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι ο τελεστής T είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in X$.
Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:
(*) $\|T(x) - T(x_0)\| < 1$ αν $x, x_0 \in X$ και $\|x - x_0\| < \delta$
Άρα, για κάθε $x \in X$ ώστε $\|x\| \leq 1$ ισχύει:
$$\|T(x)\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} x\right)\right\| = \frac{2}{\delta} \left\|T\left(\frac{\delta}{2} x + x_0\right) - T(x_0)\right\| \overset{(*)}{<} 1,$$
(διότι $\left\| \left(\frac{\delta}{2} x + x_0\right) - x_0 \right\| = \left\|\frac{\delta}{2} x\right\| = \frac{\delta}{2} \|x\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$).

Άρα, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και μάλιστα $\boxed{\|T\| \leq 1}$

<u>Πρόταση</u> Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$, $S: Y \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.
Τότε η σύνθεση $S \circ T: X \to Z$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

<u>Απόδειξη</u>
Προφανώς η συνάρτηση $S \circ T: X \to Z$ είναι γραμμικός τελεστής και για κάθε $x \in X$ ισχύει:
$$\|S \circ T(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|.$$
Άρα, ο $S \circ T$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

Ορισμοί Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός τελεστής, δηλαδή $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in X$.
και T φραγμένος, δηλαδή $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ $\forall\, x \in X$.

(1) Ο T λέγεται <u>ισομετρική εμφύτευση</u> αν
$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall\, x \in X$$
και λέγεται ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον Y.

(2) Αν επιπλέον ο T είναι επί του Y, τότε ο T λέγεται <u>ισομετρία</u> και ο X λέγεται ισομετρικός με τον Y.

(3) Ο T είναι <u>ισομορφική εμφύτευση</u> του X στον Y αν ο T είναι 1-1 και ο $T^{-1}: T(X) \to X$ είναι φραγμένος τελεστής.

(4) Ο T είναι <u>ισομορφισμός</u> και ισοδύναμα οι χώροι X, Y είναι ισομορφικοί αν ο T είναι ισομορφική εμφύτευση επί του Y.

Άρα, ο T είναι <u>ισομορφική εμφύτευση</u> αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $M, m \in \mathbb{R}$ με $M, m > 0$ ώστε:
$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ για κάθε } x \in X.$$

Ορισμός Έστω X γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ δύο νόρμες στον X.
Οι δύο νόρμες είναι **ισοδύναμες** αν οι αντίστοιχες μετρικές, που καθορίζονται από τις νόρμες αυτές είναι ισοδύναμες (δηλαδή αν οι οικογένειες των ανοικτών υποσυνόλων ως προς τις δύο αυτές μετρικές ταυτίζονται).
Σύμφωνα με το Κριτήριο Hausdorff δύο μετρικές ρ, σ του X ταυτίζονται αν για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε:
$$S_\rho(x, \delta_1) \subseteq S_\sigma(x, \varepsilon) \quad \text{και} \quad S_\sigma(x, \delta_2) \subseteq S_\rho(x, \varepsilon).$$
Ισοδύναμα ο **ταυτοτικός** τελεστής $I: (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ είναι **ισομορφισμός**, δηλαδή υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε:
$$m\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Έστω X, Y χώροι με νόρμα.
Θέτουμε:
$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ γραμμικός, φραγμένος τελεστής}\}$$
και ορίζουμε τις πράξεις:
(i) της πρόσθεσης : $+ \ \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(X,Y)$:
$$(T,S) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow T+S \in \mathcal{L}(X,Y)$$
όπου $T+S : X \to Y$ με $(T+S)(x) = T(x) + S(x) \ \forall x \in X$,
και
(ii) του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:
- $\mathbb{R} \times \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(X,Y)$
$$(\lambda, T) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}(X,Y) \to \lambda T \in \mathcal{L}(X,Y)$$
όπου $\lambda T(x) = \lambda \cdot T(x) \ \forall x \in X$.

<u>Πρόταση</u> Έστω X, Y χώροι με νόρμα.
Το σύνολο $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι διανυσματικός χώρος και η συνάρτηση της νόρμας:
$\| \cdot \| : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$ ώστε: $T \to \|T\|$
ειναι νόρμα του χώρου $\mathcal{L}(X,Y)$.

<u>Απόδειξη</u> Προφανώς $T+S$ είναι γραμμικός τελεστής
Έστω $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε
$x \in X$, $\|(T+S)(x)\| = \|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq$
$\|T\| \cdot \|x\| + \|S\| \cdot \|x\| = (\|T\| + \|S\|) \cdot \|x\|$.
Άρα, $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ και άρα $T+S$ φραγμένος
Επίσης, $\|(\lambda T)(x)\| = \|\lambda \cdot T(x)\| = |\lambda| \, \|T(x)\| \leq$
$\leq |\lambda| \, \|T\| \, \|x\|$.
Άρα, $\|\lambda T\| \leq |\lambda| \, \|T\|$ και επομένως $\lambda \cdot T$ φραγμένος
Επομένως ο $\mathcal{L}(X,Y)$ είναι διανυσματικός χώρος ως υπόχωρος του διανυσματικού χώρου
$L(X,Y)$ των γραμμικών τελεστών.
Η συνάρτηση $\| \cdot \| : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$ ώστε: $T \to \|T\|$ είναι νόρμα:
(i) $\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in X, \|x\| = 1 \} \geq 0$
(ii) $\|T\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X, \ 0 \leq \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| = 0 \Longrightarrow T = 0$.
(iii) $\|\lambda T\| = \sup \{ \|\lambda T(x)\| : \|x\| = 1 \} = |\lambda| \, \|T\|$.
(iv) $\|(T+S)(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (\|T\| + \|S\|) \|x\|$.
Άρα, $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\| \ \forall \ T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$.
Επομένως $(\mathcal{L}(X,Y), \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα.