2 Ασκήσεις

① Έστω $T: \ell^2 \to \ell^2$ ώστε

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, x_1, x_2, \dots) \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής και ισομετρία.

② Έστω $S: \ell^2 \to \ell^2$ ώστε:

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, \alpha_2, 0, \alpha_4, 0, \dots, 0, a_{2n}, \dots)$$

Αποδείξτε ότι είναι φραγμένος τελεστής και υπολογίστε την νόρμα $\|S\|$.

③ Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα ώστε:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

για κάθε $x, y \in X$. (κανόνας παραλληλογράμμου)

Αποδείξτε ότι η νόρμα του προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad \forall x, y \in X.$$

④ Έστω H χώρος Hilbert και $(x_n) \subseteq X$ ώστε $\langle x_n, x_m\rangle = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\ n \neq m$.

Αποδείξτε ότι τα επόμενα (i), (ii) είναι ισοδύναμα:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ συγκλίνει.

⑤ Έστω H χώρος Hilbert και $Y \subsetneq H$ γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in H$ ώστε: $\|x\| = 1$ και $\rho(x, Y) = 1$.

⑥ Έστω H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A \subseteq H$.

Αποδείξτε ότι $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\langle A\rangle}$,

($\langle A\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, a_i \in A, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$ και $\overline{\langle A\rangle}$ η κλειστότητα του $\langle A\rangle$.

7. Αποδείξτε ότι ο ℓ^p για $p \neq 2$ δεν είναι χώρος Hilbert

8. Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο συζυγής τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$, όπου $T^*(y^*) = y^* \circ T \ \forall y^* \in Y^*$ είναι ισομορφική εμφύτευση αν ο T είναι επί του Y

9. Έστω F γραμμικός υπόχωρος χώρου Hilbert H και $y^* \in F^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x^* \in H^*$ ώστε:
$$x^*(x) = y^*(x) \quad \forall x \in F \text{ και}$$
$$\|x^*\| = \|y^*\|.$$

10. Αποδείξτε ότι κάθε χώρος Hilbert είναι αυτοπαθής.

11. Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι δεύτερος συζυγής τελεστής $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ είναι επέκταση του T και $T^{**}(x) = T(x) \ \forall x \in X$

12. Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος Banach αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει.

(13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\|\cdot\|_1$ μια άλλη νόρμα στον X ώστε:
$$\|x\| \leq M\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X.$$
Αποδείξτε ότι αν ο χώρος $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach τότε οι νόρμες είναι ισοδύναμες.

(14) Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι:
$$\rho(x_0, Y) = \sup\{|x^*(x_0)| : x^* \in X^*, \ \|x^*\| = 1 \text{ και } Y \subseteq \ker(x^*)\}.$$

(15) Έστω H χώρος Hilbert και Y γραμμικός υπόχωρός του. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x^* \in H^*$ ώστε: $x^*(x) = y^*(x)$ $\forall\, x \in Y$ και $\|x^*\| = \|y^*\|$.

(16) Αποδείξτε ότι αν οι χώροι Banach X, Y είναι ισομορφικοί, τότε και οι συζυγείς χώροι X^*, Y^* είναι ισομορφικοί.

(17) Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_n) \subseteq X$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία $(x^*(x_n))$ είναι φραγμένη για κάθε $x^* \in X^*$.

(18) Ορίστε στο χώρο ℓ^2 μια νόρμα $\|\cdot\|$, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_2$, ώστε ο $(\ell^2, \|\cdot\|)$ να μην είναι χώρος Banach