ΧΩΡΟΙ HILBERT
Μαθημα 3ο

Προταση 1 Εστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert.

(i) Αν F_1, F_2 κλειστοί υπόχωροι του H, ώστε $F_1 \subseteq F_2$, τότε $P_{F_1} \circ P_{F_2} = P_{F_2} \circ P_{F_1} = P_{F_1}$.

(ii) Αν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) ακολουθία κλειστών υποχώρων του H και $F = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$ (αντ. $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$), τότε:
$$P_{F_n}(x) \longrightarrow P_F(x) \quad \forall\, x\in H.$$

Απόδειξη

(i) Έστω F_1, F_2 κλειστοί υπόχωροι του H και έστω $F_1 \subseteq F_2$, $x\in H$. Τότε
$$x - P_{F_2}(x) \in F_2^{\perp} \subseteq F_1^{\perp}, \text{ αφού } F_1 \subseteq F_2.$$
Άρα, $x - P_{F_2}(x) \in F_1^{\perp}$ και άρα $P_{F_1}(x - P_{F_2}(x)) = 0$.
Συνεπώς, $P_{F_1}(x) = P_{F_1}(P_{F_2}(x)) = P_{F_1}\circ P_{F_2}(x)$ $\forall x\in H$.
Επίσης, $P_{F_1}(x) \in F_1 \subseteq F_2$, άρα
$$P_{F_1}(x) = P_{F_2}(P_{F_1}(x)) = P_{F_2}\circ P_{F_1}(x) \quad \forall\, x\in H$$

(ii) Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων του H. Τότε:
$$F = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = \{x\in F : P_{F_n}(x) \xrightarrow[n]{} x\} = L$$
Το σύνολο L είναι προφανώς γραμμικός υπόχωρος του H και κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω $(x_m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L$ ώστε $\|x_m - x\| \to 0$ για $x\in H$. Ισχύει
$$\|P_{F_n}(x) - x\| \leq \|P_{F_n}(x) - P_{F_n}(x_m)\| + \|P_{F_n}(x_m) - x_m\| + \|x_m - x\|$$
$$\leq 2\|x_m - x\| + \|P_{F_n}(x_m) - x_m\| \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}$$

Αφού $(x_m) \subseteq L$, έχουμε:

$(x_m) \subseteq F$ και $P_{F_n}(x_m) \xrightarrow[n]{} x_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$

και, επίσης $\|x_m - x\| \xrightarrow[m]{} 0$

Άρα, $x \in L$, και επομένως το L είναι κλειστό σύνολο. Έχουμε $F_n \subseteq L$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, $\boxed{F = L} = \{x \in F : P_{F_n}(x) \to x\}$

Έστω $x \in H$.

Τότε $x - P_F(x) \in F^{\perp} \subseteq F_n^{\perp}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και

άρα $P_{F_n}(x - P_F(x)) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως $P_{F_n}(x) = P_{F_n}(P_F(x))$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Και άρα

$$\lim_n P_{F_n}(x) = \lim_n P_{F_n}(P_F(x)) = P_F(P_F(x)) = P_F(x)$$

Άρα, $\lim P_{F_n}(x) = P_F(x)$ $\forall$ $x \in H$.

Θεώρημα Riesz

Πρόταση 2

Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert και $x \in H$.
Θεωρούμε την συνάρτηση
$f_x : H \to \mathbb{R}$ ώστε $f_x(y) = <x, y>$ $\forall y \in H$
Τότε η συνάρτηση f_x είναι γραμμική και φραγμένη, μάλιστα $\|f_x\| = \|x\|$ $\forall x \in H$.

Απόδειξη

Προφανώς η συνάρτηση f_x για $x \in H$ είναι γραμμική, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.
Επίσης, για κάθε $x \in H$ έχουμε ότι:

$$|f_x(y)| = |<x, y>| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall y \in H,$$

άρα, $\|f_x\| \leq \|x\|$ $\forall x \in H$.

Για $x = 0$, προφανώς $f_x = 0$ και $\|f_x\| = 0$
Για $x \neq 0$ ισχύει:

$$|f_x(\tfrac{x}{\|x\|})| = <x, \tfrac{x}{\|x\|}> = \|x\|.$$

Άρα, $\|f_x\| \geq \|x\|$, διότι $\|\tfrac{x}{\|x\|}\| = 1$.

Επομένως, $\|f_x\| = \|x\|$ $\forall x \in H$.

3. Θεώρημα Riesz

Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert
Για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $\boxed{f = f_x}$
(δηλαδή $f(y) = <x, y>$ $\forall y \in H$)
Μάλιστα $\|f_x\| = \|x\|$ $\forall x \in X$

Άρα, κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικός με τον δυϊκό χώρο του, μέσω της συνάρτησης $T : H^* \to H$ όπου $T(f) = x$ για $f = f_x$.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Riesz:</u> Έστω $f \in H^*$.

Αν $f(x)=0 \ \forall x \in H$, τότε $f=f_0$.

Αν $f \not\equiv 0$ τότε θέτουμε:

$$M=\{y \in H : f(y)=0\} \subsetneqq H$$

Ο M είναι προφανώς γραμμικός υπόχωρος του H, αφού η f γραμμική.

Επίσης $M \neq H$ διότι $f \not\equiv 0$

Επίσης $M \neq \phi$, διότι $0 \in M$.

Ο υπόχωρος M του H είναι προφανώς κλειστός, διότι $M=f^{-1}(\{0\})$ και η f είναι συνεχής.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4 (18), για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $\boxed{z_0 \in M^{\perp}}$ ώστε: $\| z_0 \| = \rho(x,M) \geq 0$, ($z_0 = x - y_0$, $\|x-y_0\|$ "$\rho(x,F)$")

$$\boxed{z_0 \in M^{\perp}} \Longleftrightarrow \langle z_0, y \rangle = 0 \ \forall y \in M$$

(*) και $z_0 = x_0 - y_0 \neq 0$ για $x_0 \in H \setminus M$, $y_0 \in M$

Το ζητούμενο $x \in H$ ώστε $f=f_x$ είναι ένα πολλαπλάσιο του z_0, δηλαδή $x=\lambda z_0$ για $\lambda \in \mathbb{R}$:

Έστω $y \in H$. Τότε $f(z_0)y - f(y) \cdot z_0 \in M$ διότι $f(f(z_0)y - f(y)z_0)=0$.

Αφού $\underline{z_0 \in M^{\perp}}$, και $f(z_0)y - f(y)z_0 \in M$ έχουμε:

$$0=\langle f(z_0)y - f(y)z_0, z_0 \rangle = f(z_0)\langle y, z_0\rangle - f(y)\langle z_0, z_0\rangle$$

Άρα, $$\boxed{f(y)} = \frac{f(z_0)\cdot\langle y, z_0\rangle}{\langle z_0, z_0\rangle} = \langle x, y \rangle = \boxed{f_x(y)} \ \forall y \in H$$

όπου $x = \dfrac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0\rangle} \cdot z_0$.

Ισχύει η μοναδικότητα του x ώστε $f_x = f$, διότι:

$$f_{x_1} = f_x \Rightarrow f_{x_1}(y) = f_x(y) \ \forall y \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_1, y \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall y \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_1 - x, y \rangle = 0 \ \forall y \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x_1 - x, x_1 - x \rangle = 0 \Rightarrow x_1 - x = 0 \Rightarrow x_1 = x.$$

Συνέπεια του Θεωρήματος Riesz:

4. **Θεώρημα** Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert. Τότε ο δυϊκός χώρος H^* του H είναι **ισομετρικός** με τον H.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση:

$$T : H \longrightarrow H^*$$

όπου $T(x) = f_x \in H^*$.

Η συνάρτηση T είναι ισομετρία.

διότι: $\|T(x)\| = \|f_x\| = \|x\| \quad \forall x \in H$

από το Θεώρημα Riesz.

Ορθοκανονικά συστήματα

5. **Ορισμός**

Έστω $(E, <\cdot,\cdot>)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $A = \{e_i \in E : i \in I\}$ λέγεται **ορθοκανονικό** αν:

(i) $e_i \perp e_j \quad \forall i, j \in I$ και $i \neq j$ και

(ii) $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία ενός ορθοκανονικού συνόλου A είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι:

αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, τότε $\lambda_k = < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_k > = <0, e_k> = 0$

$\forall 1 \leq k \leq n$.

6 Θεώρημα Διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram – Schmidt (5)

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε οι παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι από τις δύο ακολουθίες να ταυτίζονται: $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \langle (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$.

Απόδειξη

Θέτουμε $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ Τότε $\langle x_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$.

Υποθέτουμε ότι ορίστηκαν $e_1, \dots, e_n \in E$ ώστε $\{e_1, \dots, e_n\}$ να είναι ορθοκανονικό σύνολο και $\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ για κάθε $1 \leq k \leq n$.

Θέτουμε:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_j \rangle e_j$$

Τότε $y_{n+1} \neq 0$, διότι αν $y_{n+1} = 0$, τότε $x_{n+1} \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, άτοπο! (από την ανεξαρτησία)

Θέτουμε:

$$e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$$

και τότε $\langle e_{n+1}, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$ ορθοκανονικό

Άρα, $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ είναι ορθοκανονικό και $\langle e_1, \dots, e_{n+1} \rangle = \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle$

Επαγωγικά έχουμε το ζητούμενο.

Παραδείγματα

(1) Το σύνολο $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^2$, όπου $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n\text{-θέση}}{1}, 0, \dots)$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία

(2) Τα πολυώνυμα $1, t, t^2, \dots$ αποτελούν ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του $C([0,1])$. Εφαρμόζοντας την διαδικασία Gram-Schmidt λαμβάνουμε τα πολυώνυμα Legedre, που συνιστούν ορθοκανονικό σύστημα στο $C([0,1])$

<u>Πρόταση</u> Έστω $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $A = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq H$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H. Αν $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ο παραγόμενος διανυσματικός υπόχωρος του H από τα $e_1, \dots, e_n$, τότε

$$\rho(x, F) = \|x - y_0\| \quad \text{όπου} \quad y_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x \in H$.
Από την Πρόταση 4 (2) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $y_0 \in F$ ώστε $x - y_0 \in F^{\perp}$.
Μάλιστα $\|x - y_0\| = \rho(x, F)$
$x - y_0 \in F^{\perp}$ διότι $\langle x - y_0, e_k \rangle = 0$ διότι

Έχουμε $\langle x, e_k \rangle = \langle y_0, e_k \rangle \Leftrightarrow \langle x - y_0, e_k \rangle = 0 \quad \forall \, k = 1, \dots, n$
και $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ισχύει $\boxed{x - y_0 \in F^{\perp}}$

<u>Πρόταση</u> (Ανισότητα Bessel)
Έστω $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία.
Τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall \, x \in H$$

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $x \in H$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\boxed{u_k = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n}$$

Από την προηγούμενη Πρόταση

$$x - u_k \perp u_k$$

άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|x\|^2 = \|(x - u_k) + u_k\|^2 = \|x - u_k\|^2 + \|u_k\|^2 \geq \|u_k\|^2. \quad (*)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|u_k\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle^2 \quad \forall \, k \in \mathbb{N} \quad (**)$$

Άρα από $(*)$ και $(**)$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall \, x \in H$$

Σειρές σε χώρους Banach

Ορισμός Έστω $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Θέτουμε $s_n = x_1 + \dots + x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ την ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζουμε Σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Έστω $x \in X$. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο x και γράφουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$$

αν $s_n \to x \iff \|s_n - x\| \to 0$

Παρατηρήσεις

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X \Rightarrow x_n \to 0$
   διότι $s_n - s_{n-1} = x_n \to 0$

2. Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. για σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ στον X συγκλίνει αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

∞

8. Πρόταση

Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert και $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ορθοκανονική ακολουθία στον H. Έστω $F = \langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ο παραγόμενος διανυσματικός χώρος από την ακολουθία $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε

(i) $P_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \forall x \in H$ (P_F προβολή στο F)

(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \forall x \in F$

κατά μοναδικό τρόπο

Απόδειξη

(i) Έστω $x \in H$. Από την ανισότητα Bessel (7. Πρόταση) έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle^2 \le \|x\|^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς παίρνοντας όριο ως προς $m \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \le \|x\|^2 < \infty$$

Άρα, $\boxed{(\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.}$

Επειδή, $\forall m, k \in \mathbb{N}$ $m < k$ ισχύει:

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 =$$

$$(*) \quad \left\| \sum_{n=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 \le \sum_{n=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle^2 \quad \forall m < k$$

Από την ανισότητα Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \le \|x\|^2$ άρα η ακολουθία $\left(\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle^2 \right)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy

Επομένως, από την $(*)$, και η ακολουθία $\left(\sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n \right)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H$ είναι Cauchy.

Ο $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert, άρα πλήρης οπότε υπάρχει $y \in H$ ώστε:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = \lim_k \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Τότε $x - y \in F^{\perp}$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου άρα $y = P_F(x)$.