18 ΧΩΡΟΙ HILBERT

Μάθημα 2ο

Πρόταση 1

Έστω $(H, \langle\ \rangle)$ χώρος Hilbert και $F \subseteq H$ κλειστό και κυρτό ($\lambda x + (1-\lambda) y \in F$ $\forall x, y \in F$ και $0 \leq \lambda \leq 1$)

Τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y_0 \in F$ ώστε: $\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\| : y \in F\} = \rho(x,F) = \delta$

Συμβολίζουμε το $y_0 \in F$ με $\boxed{P_F(x)}$.

Απόδειξη

Έστω $x \in H$ και ακολουθία $(y_n) \subseteq F$ ώστε:

(1) $\|x - y_n\| \longrightarrow \boxed{\rho(x,F) = \delta} = \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$.

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$\forall n,m \in \mathbb{N}$, $\|y_n - y_m\|^2 = \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 =$

$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|(y_n - x) - (x - y_m)\|^2$

(*) $= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$.

Αφού το $F \subseteq H$ είναι κυρτό, $\frac{y_n + y_m}{2} \in F$

και άρα $\boxed{\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq \rho(x,F) = \delta \quad (**)}$

Επομένως από τις (*), (*,*) έχουμε:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2,$$

και άρα από την (1) έχουμε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F \subseteq H$ είναι βασική.

Αφού ο H είναι χώρος Hilbert, άρα πλήρης μετρικός χώρος υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε: $\boxed{y_n \rightarrow y_0} \Longleftrightarrow \|y_n - y_0\| \rightarrow 0$.

Αφού $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ και $F \subseteq X$ κλειστό έχουμε $\boxed{y_0 \in F.}$

Επομένως

$$\|x-y_0\| = \lim_n \|x-y_n\| = \boxed{\rho(x,F)=\delta} \quad (***)$$

από την (1).

Το $y_0 \in F$ είναι το μοναδικό στοιχείο του F με αυτή την ιδιότητα:

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $y_1 \in F$ ώστε

$$\boxed{\|x-y_1\| = \rho(x,F)=\delta} \quad (****)$$

Τότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έχουμε $\forall x \in H$:

$$\|(x-y_1)+(x-y_0)\|^2 + \|(x-y_1)-(x-y_0)\|^2 =$$

$$= 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_0\|^2.$$

Άρα,

$$\|2x-(y_1+y_0)\|^2 + \|y_0-y_1\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_0\|^2.$$

και άρα

$$\left\|x - \frac{y_1+y_0}{2}\right\|^2 < \frac{1}{2}\left(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_0\|^2\right) = \rho(x,F)^2$$

Άτοπο!, διότι $\frac{y_1+y_0}{2} \in F$.

Άρα $y_0 \in F$ είναι μοναδικό ώστε:

$$\|x-y_0\| = \delta = \inf\{\|x-y\| : y \in F\} = \rho(x,F).$$

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert και $F \subseteq H$ κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του H. Τότε: $\forall x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y_0 \in F$ ώστε:

$$\|x-y_0\| = \rho(x,F).$$

<u>Απόδειξη</u>

Προφανής, αφού ο F είναι κυρτό σύνολο. Συμβολίζουμε το μοναδικό $y_0 \in F$ με

$$\boxed{y_0 = P_F(x)}.$$

Πρόταση 2. Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert και έστω $F \subseteq H$ κλειστό και κυρτό και $x \in H$. $\|x-y\| = \varphi(x,F)$ για $y \in F$ αν και μόνο αν ισχύει
$$<x-y,\ z-y> \leq 0 \quad \forall\ z \in F.$$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $\|x-y\| = \varphi(x,F)$ για $y \in F$. Έστω $z \in F$.
Το F είναι κυρτό, άρα για κάθε $\boxed{0 \leq \lambda \leq 1}$ ισχύει: $\boxed{(1-\lambda)y + \lambda z \in F.}$

Επομένως,
$$\|x-y\|^2 = \varphi^2(x,F) \leq \|x - [(1-\lambda)y + \lambda z]\|^2 = \|(x-y) + (\lambda y - \lambda z)\|^2$$
$$= <(x-y) + \lambda(y-z), (x-y) + \lambda(y-z)> =$$
$$= <(x-y),(x-y)> + <\lambda(y-z), \lambda(y-z)> + 2<(x-y), \lambda(y-z)>$$
$$= \|x-y\|^2 + \lambda^2\|y-z\|^2 + 2<(x-y), \lambda(y-z)>.$$

Άρα έχουμε $\forall\ 0 \leq \lambda \leq 1$
$$0 \leq \lambda^2\|y-z\|^2 + 2<x-y, \lambda(y-z)>.$$

Επομένως, $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$ ισχύει:
$$\lambda^2\|y-z\|^2 + 2\lambda<x-y, y-z> \geq 0$$

Άρα για $\boxed{\text{κάθε}}$ $0 \leq \lambda \leq 1$ ισχύει:
$$<x-y,\ y-z> \geq \frac{-1}{2}\lambda\|y-z\|^2. \quad (*)$$

Συνεπώς, $<x-y,\ y-z> \geq 0 \quad \forall\ z \in F$
$$\Updownarrow$$
$$<x-y,\ z-y> \leq 0 \quad \forall\ z \in F.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\boxed{y \in F}$, ώστε $<x-y,\ z-y) \leq 0\ \forall z \in F$.
Τότε: για κάθε $z \in Z$ ισχύουν:
$$\|x-z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2 =$$
$$\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2<x-y, y-z> =$$
$$\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2<x-y, z-y>.$$

Από την υπόθεση, $<x-y, z-y> \leq 0 \quad \forall\ z \in F$.
Άρα,
$$\|x-z\| \geq \|x-y\| \quad \forall z \in F$$ και άρα
$$\boxed{\|x-y\| = \varphi(x,F)}$$ αφού $y \in F$.

Καθετότητα

Ορισμός Έστω $(H, <\cdot,\cdot>)$ χώρος Hilbert.

(i) Τα $x, y \in H$ είναι **κάθετα** αν
$$<x,y>=0$$
Τότε γράφουμε $x \perp y$.

(ii) Έστω $F \subseteq H$. Το ορθογώνιο σύνολο $F^{\perp}$ του F ορίζεται:
$$F^{\perp} = \{x \in H : <x,y>=0 \;\; \forall y \in F\}.$$

Παρατηρήσεις

① $y \perp x \;\; \forall x \in H \Leftrightarrow y = \vec{0}$ $[(\Rightarrow) <y,y>=0 \Rightarrow \|y\|=0 \Rightarrow y=0) \; (\Leftarrow) <\vec{0},x>=0 \; \forall x \in X$

② Αν $x, y \in H$ και $x \perp y$, δηλαδή $<x,y>=0$, τότε:
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2<x,y> = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
(Πυθαγόρειο Θεώρημα)

③ Το ορθογώνιο σύνολο $F^{\perp}$ ενός συνόλου $F \subseteq H$ είναι γραμμικός υπόχωρος του H και κλειστός.

Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in F^{\perp}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda x_1 + \mu x_2 \in F^{\perp}$, διότι $\forall y \in F$ ισχύει:
$$<\lambda x_1 + \mu x_2, y> = \lambda <x_1, y> + \mu <x_2, y> = 0.$$
Άρα, $F^{\perp}$ γραμμικός υπόχωρος.

Επίσης, $F^{\perp} \subseteq H$ <u>κλειστό</u>, διότι αν $(x_n) \subseteq F^{\perp}$ και $x_n \to x$, $x \in H$, τότε:

$\forall y \in F \; <x_n, y>=0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, αφού $(x_n) \subseteq F^{\perp}$ και
$$<x_n, y> \longrightarrow <x,y>, \text{ λόγω συνέχειας.}$$
Άρα, $<x,y>=0 \;\; \forall y \in F$ και $\boxed{x \in F^{\perp}}$

④ $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, διότι αν $x \in F \cap F^{\perp}$ τότε $<x,x>=0$. Άρα, $x=0$. Επίσης, $0 \in F \cap F^{\perp}$ προφανώς, διότι $F^{\perp}$ διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 4

Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert και $F \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος του H.
Για κάθε $x \in H$ υπάρχει μοναδικό $y_0 \in F$ ώστε: $\boxed{x - y_0 \in F^{\perp} \iff \langle x-y_0, z\rangle = 0 \ \forall z \in F.}$
Μάλιστα $\|x-y_0\| = \rho(x,F)$.

Απόδειξη

Έστω $x \in H$.
Ο F ως υπόχωρος είναι κυρτό σύνολο, άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1, υπάρχει μοναδικό $\boxed{y_0 \in F}$ ώστε:

$$\boxed{\|x-y_0\| = \rho(x,F)} = \inf\{\|x-y\| : y \in F\}.$$

Άρα, ισοδύναμα υπάρχει μοναδικό $\boxed{y_0 \in F}$ ώστε:

$$(*) \quad \langle x-y_0, z-y_0\rangle \leq 0 \ \forall z \in F,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 2.
Ο F είναι γραμμικός υπόχωρος, άρα $z+y_0 \in F \ \forall z \in F$ και από την $(*)$ έχουμε:

$(**)\ \forall z \in F \ \langle x-y_0, (z+y_0)-y_0\rangle = \boxed{\langle x-y_0, z\rangle \leq 0}$

Επίσης έχουμε (αφού ο F υπόχωρος του H) $-z \in F$, άρα $(**)$ $\langle x-y_0, -z\rangle = \boxed{-\langle x-y_0, z\rangle \leq 0.}$

Επομένως $\boxed{\langle x-y_0, z\rangle = 0} \ \forall z \in F$

Δηλαδή, $\boxed{x-y_0 \in F^{\perp}.}$

Το $y_0 \in F$ ώστε $x-y_0 \in F^{\perp}$ είναι μοναδικό, διότι αν $\boxed{y_1 \in F}$ ώστε $\boxed{x-y_1 \in F^{\perp}}$ τότε: $\langle x-y_1, z-y_1\rangle = 0 \ \forall \boxed{z \in F}$

Άτοπο! από την μοναδικότητα του $y_0 \in F$ ώστε, $\langle x-y_0, z-y_0\rangle \leq 0 \ \forall z \in F$.
(ιδιότητα $(*)$)

<u>Ορισμός</u>

Έστω $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert,
$F \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος του H και $x \in F$.
Το μοναδικό στοιχείο $y_0 \in F$ ώστε $x - y_0 \in F^{\perp}$ (σύμφωνα με την Πρόταση 4) συμβολίζεται με $P_F(x)$, και ονομάζεται **προβολή** του x στο F. Άρα:

$$(*) \quad \boxed{P_F(x) = y_0 \iff x - y_0 \in F^{\perp}}$$

<u>Παρατήρηση</u>, Σύμφωνα με την Πρόταση 4,

$$\boxed{x - P_F(x) \in F^{\perp}} \iff \langle x - P_F(x), z \rangle = 0 \quad \forall z \in F.$$

και

$$\boxed{\|x - P_F(x)\| = \rho(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}}$$

Δηλαδή, το $P_F(x)$ είναι το μοναδικό στοιχείο y_0 του H με την ιδιότητα $\boxed{\|x - y_0\| = \rho(x, F)}$

<u>Πρόταση 5</u>

Έστω $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ χώρος Hilbert και $\{0\} \neq F \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος του H.
Τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής

$$P_F : H \longrightarrow F$$

ώστε:

$$\|P_F\| \leq 1, \qquad P_F(x) = x \quad \forall x \in F \text{ και}$$

$$\{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in F\} = \boxed{F^{\perp} = \{x \in H : P_F(x) = 0\}}$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x \in H$.
Θέτουμε $P_F(x) = y$, όπου y το μοναδικό στοιχείο y του F ώστε: $\boxed{x - y \in F^{\perp} \iff \langle x - y, z \rangle = 0 \ \forall z \in F}$ (Πρόταση 4)
Επίσης $\|x - y\| = \rho(x, F) = \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$,
σύμφωνα με την Πρόταση 4.
Ο P_F είναι γραμμικός τελεστής φραγμένος.

Ο τελεστής P_F είναι γραμμικός:
Έστω $x_1, x_2 \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και έστω
$P_F(x_1) = y_1$, $P_F(x_2) = y_2$, τότε $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$P_F(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda P_F(x_1) + \mu P_F(x_2)$, διότι:

$$< \lambda x_1 + \mu x_2 ; z > = \lambda < x_1 ; z > + \mu < \cancel{x}_2 , z > = 0$$
$$= \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda P_F(x_1) + \mu P_F(x_2).$$

Επίσης ο P_F είναι φραγμένος:
Έστω $x \in H$. Τότε $< x - P_F(x), P_F(x) > = 0$ από την (*). Άρα, $< x, P_F(x) > = < P_F(x), P_F(x) > = \|P_F(x)\|^2$ για κάθε $x \in H$. (**)

Άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι: $\forall\ x \in H$

(**) $\|P_F(x)\|^2 = < x, P_F(x) > \leq \|x\| \, \|P_F(x)\|$
Άρα, $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ και άρα $\boxed{\|P_F\| \leq 1}$.
Επομένως, P_F φραγμένος γραμμικός τελεστής.
Μάλιστα, $\boxed{\text{αν } x \in F, \text{ τότε } P_F(x) = x}$ $(x - x \in F^{\perp})$
Επίσης, σύμφωνα με την Πρόταση 4 (Παρατήρηση)
και αφού $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall\ z \in F$
έχουμε ότι $F^{\perp} = \{ x \in H : P_F(x) = 0 \}$.