ΧΩΡΟΙ HILBERT

Ορισμός 1: Έστω H γραμμικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον H είναι μια συνάρτηση:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$ ώστε:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$.

(ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(iv) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

για κάθε $x, y, z \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Προφανώς από τις ιδιότητες (iii) και (iv) ισχύει και η ισότητα:

(v) $\boxed{\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle}$

για κάθε $x, y \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

όπως και η συνεπαγωγή:

(vi) $\boxed{x = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in X}$

λόγω τις ιδιότητας (iv) $\left(\langle 0, y \rangle = \langle x + (-x), y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0 \right)$

Ανισότητα Cauchy Schwarz

Έστω $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε:

$$\boxed{\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in H} \quad (*)$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την $(*)$ για $y \in H$ με $\boxed{\langle y, y \rangle = 1}$

Πράγματι: $\forall x \in H$, $y \in H$ με $\boxed{\langle y, y \rangle = 1}$ ισχύει:

$$\overset{(ii)}{0 \leq} \langle x - \langle x, y \rangle y, \; x - \langle x, y \rangle y \rangle =$$

$$\overset{(iv)}{=} \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle^2 \langle y, y \rangle =$$

$$\overset{(iii)}{=} \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle^2 + \langle x, y \rangle^2 \cdot \langle y, y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle^2, \quad (\text{αφού } \langle y, y \rangle = 1).$$

Άρα ισχύει η $(*)$ αν $\langle y, y \rangle = 1$.

Η ανισότητα (*) είναι προφανής αν $\boxed{y=0}$ από (vi).

Αν $\boxed{y\neq 0}$, άρα $\langle y,y\rangle > 0$ (ii), τότε η ανισότητα (*) είναι ισοδύναμη με την (**) $\left\langle x, \frac{y}{\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}}\right\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle$ $\forall x\in H$.

Θέτουμε $y_1 = \frac{y}{\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}}$. Τότε $\boxed{\langle y_1,y_1\rangle = 1}$

Άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη της ανισότητας (*) για την ειδική αυτή περίπτωση, έχουμε:

$$\langle x,y_1\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \text{. (**)}$$

και άρα, αφού $\langle y,y\rangle > 0$ έχουμε:

(***) $\boxed{\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}$ $\forall x,y\in H$.

Πρόταση 1

Έστω H γραμμικός χώρος και $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{R}$ εσωτερικό γινόμενο στο H. Τότε, θέτοντας $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}$ $\forall x\in H$ έχουμε ότι ο $(H,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.

Απόδειξη

Προφανώς (i) $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$. (i) $(\langle x,x\rangle\geq 0)$

$\forall x\in H$ (ii) $\|x\|=0 \Rightarrow \langle x,x\rangle = 0 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} x=0$.

$\forall \lambda\in\mathbb{R}, x\in H$ (iii) $\|\lambda x\| = (\langle \lambda x, \lambda x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\,\|x\|$.

Για κάθε $x,y\in H$ ισχύει:

(1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$. (iv) και

Άρα, $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2}$

(2) $\boxed{\langle x,y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|}$ (***)

Επομένως $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ και τελικά $\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ $\forall x,y\in X$.

Πρόταση 2

Έστω $(H, \langle \cdot \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα από το εσωτερικό γινόμενο στον H, $(\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}}\ \forall x \in H)$
Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ και $\|x_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow x_n \to x$ και $\|y_n - y\| \to 0 \Leftrightarrow y_n \to y$ για $x, y \in H$, τότε

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Απόδειξη

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$

$$(*) \quad \text{(ορισμός } \langle\ \rangle) = |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\text{(Cauchy-Schwarz)} \leq \|x_n\|\cdot\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\cdot\|y\|$$

Αφού $x_n \to x$, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ φραγμένη, έστω $\boxed{\|x_n\| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}}$
Επίσης $\|x_n - x\| \to 0$ και $\|y_n - y\| \to 0$,
άρα $\|x_n\|\cdot\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \xrightarrow[n]{} 0$ και άρα
από την $(*)$ $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \to 0 \Leftrightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Παρατήρηση

Το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο H με την επαγόμενη νόρμα είναι συνεχής συνάρτηση σύμφωνα με την Πρόταση 2.

Κανόνας του παραλληλογράμμου

Έστω $(H, \langle \cdot \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα στον H,
$\boxed{(\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \forall x \in H)}$ (Πρόταση 1)
Για κάθε $x, y \in H$ ισχύει:

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$$

Σύμφωνα με τις σχέση (1) της Πρότασης 1

(1) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in H$
(2) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$

Άρα, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\cdot\|y\|^2$ $\forall x, y \in H$

Ορισμός

Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert αν η νόρμα του καθορίζεται απο ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot , \cdot \rangle \; H\times H \to \mathbb{R}$ δηλαδή $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}} \;\; \forall\, x\in H.$

Παραδείγματα

(α) Ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Hilbert. Πράγματι, ορίζουμε: $\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ και $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\; \forall\, x=(x_1,\dots,x_n),\, y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ που είναι εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$

(β) Ο χώρος $\ell_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ με την νορμα $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

(Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει, διότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(ανισότητα Cauchy-Schwarz)

(γ) Ο χώρος $(C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ όπου

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \;\forall\, f\in C([a,b])$$

είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f,g\in C([a,b])$$

αλλά **δεν** είναι **πλήρης** μετρικός χώρος.

(δ) Ο $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ είναι **πλήρης** μετρικός χώρος, αλλα η νόρμα του **δεν** προέρχεται απο εσωτερικό γινόμενο. (οι συναρτήσεις $f, g: [0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(t) = 1-t$, $g(t) = t$ **δεν** ικανοποιούν το κανόνα παρ/μου.

Παρατηρήσεις

(1) Κάθε κλειστός υπόχωρος Y χώρου Hilbert X είναι χώρος Hilbert.
Πράγματι ο Y ως κλειστός υπόχωρος του X είναι χώρος Banach και $\|x\| = \langle x, x \rangle$ $\forall x \in Y$.

(2) Αν ένας χώρος Banach X είναι ισομετρικός με ένα χωρο Hilbert H, τότε και ο X είναι Hilbert.
Πράγματι, αν $T: X \to H$ ισομετρία, τότε θέτοντας $\langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle$ $\forall x, y \in X$, η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.
Επιπλέον ισχύει:
$\forall x \in X$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle T(x), T(x) \rangle} = \|T(x)\|$.

Πρόταση

Εστω $(H, \|\cdot\|)$ χώρος Hilbert και $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ το εσωτερικό γινόμενό του, ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $\forall x \in H$.
Το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνάρτηση

Απόδειξη

Εστω $(x_n) \subseteq H$, $(y_n) \subseteq H$ και $x, y \in H$ ώστε:
$x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Τότε $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.
Πράγματι:
$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|$$
$$= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$$
Άρα, $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.
Επομένως η συνάρτηση του εσωτερικού γινομένου είναι συνεχής