Μάθημα 14

Συνέπειες του Θεωρήματος Hahn-Banach

Συζυγείς τελεστές

Για πληρότητα αναφέρουμε το Θεώρημα Hahn-Banach και τα πορίσματά του.

Θεώρημα Hahn-Banach

Έστω $(X,+,\cdot)$ διανυσματικός χώρος και $p: X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε:

$p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$

$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

$p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x) \quad \forall \lambda > 0$ και $x \in X$.

Έστω $Y \leq X$ διανυσματικός υπόχωρος του X και $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση ώστε $\varphi(y) \leq p(y) \ \forall y \in Y$.

Τότε υπάρχει: $\psi: X \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση

ώστε: $\psi(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$

και $\psi/_Y = \varphi$, δηλαδή ψ επέκταση της φ.

Πορίσματα Θεωρήματος Hahn-Banach

2 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Για κάθε $Y \hookrightarrow X$ **κλειστό** υπόχωρο του X και $x_0 \in X \setminus Y$ υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\|=1$, $x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y$ και $x^*(x_0) = \rho(x_0, Y) > 0$.

(ii) Για κάθε $x_0 \in X$ με $\boxed{x_0 \neq 0}$ υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\|=1$ ώστε $x^*(x_0) = \|x_0\|$.

(iii) Για κάθε υπόχωρο $Y \hookrightarrow X$ του X ισχύει:

$$[Y \leq X \text{ πυκνό}] \Longleftrightarrow [\forall x^* \in X^* \quad x^*(x) = 0 \ \forall x \in Y \Downarrow x^* = 0]$$

1 Αν $Y \hookrightarrow X$ και $y^* \in Y^*$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε: $\boxed{\|x^*\| = \|y^*\| \text{ και } x^*/_Y = y^*}$

3 X^* διαχωρίσιμος $\Longrightarrow$ X διαχωρίσιμος

Το αντίστροφο δεν ισχύει: π.χ για $X = \ell^1$, $X^* = \ell^\infty$

Συζυγείς τελεστές

Ορισμός 1 Έστω X, Y γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής του T ορίζεται ως ο τελεστής $\boxed{T^*: Y^* \to X^*}$ όπου
$$\boxed{T^*(y^*) = y^* \circ T \in X^*} \quad \forall y^* \in Y^*$$
($X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R} : x^*$ γραμμικός φραγμένος τελεστής$\}$)

Πρόταση 1 Έστω $T: X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής.

(i) Ο συζυγής τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$ είναι και φραγμένος, γραμμικός τελεστής και
$$\boxed{\|T^*\| = \|T\|.}$$

(ii) Μάλιστα ο T^* είναι $\boxed{1-1}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\boxed{T(X) \subseteq Y \text{ είναι πυκνό}}$, και

(iii) ο T^* είναι $\boxed{\text{επί}}$ του X^* αν ο T είναι $\boxed{\text{ισομορφική εμφύτευση.}}$

Απόδειξη

(i) Έχουμε ότι ο T είναι φραγμένος, γραμμικός τελεστής μεταξύ των χώρων με νόρμα X, Y.
Ο $T^*: Y^* \to X^*$ είναι γραμμικός τελεστής, διότι:
$$T^*(\lambda y_1^* + \mu y_2^*) = (\lambda y_1^* + \mu y_2^*) \circ T =$$
$$= \lambda y_1^* \circ T + \mu y_2^* \circ T = \lambda (y_1^* \circ T) + \mu (y_2^* \circ T)$$
$$= \lambda \cdot T^*(y_1^*) + \mu \cdot T^*(y_2^*).$$

Ο $T^*: Y^* \to X^*$ είναι φραγμένος τελεστής διότι: $\boxed{\forall y^* \in Y^*}$ ισχύουν:
$$\|T^*(y^*)\| = \|y^* \circ T\| \leq \|y^*\| \cdot \|T\|, \text{ άρα}$$
$$\boxed{\|T^*\| \leq \|T\| < \infty}. \quad (*)$$

Άρα, ο τελεστής T^* είναι φραγμένος, γραμμικός τελεστής.

Ισχύει:
$\|T^*\| = \|T\|$

1. Αν $\|T\|=0$, τότε και $\|T^*\|=0$, διότι $\|T^*\| \leq \|T\|$.

2. Αν $0<\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x\in X \text{ και } \|x\|=1\}$, τότε για τυχόν $\boxed{0<\varepsilon<\|T\|}$ υπάρχει $x_0 \in X$ με $\boxed{\|x_0\|=1}$ ώστε: $\boxed{\|T(x_0)\| > \|T\|-\varepsilon > 0}$, $(*)$

Αφού $T(x_0) \neq 0$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2(ii) του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $\boxed{\|y^*\|=1}$ ώστε:
$$\boxed{y^*(T(x_0)) = \|T(x_0)\|} \quad (**)$$

Επομένως $\boxed{\forall\ 0<\varepsilon<\|T\|}$ ισχύει:

$$\|T^*\| \geq \|T^*(y^*)\| \geq \|T^*(y^*)(x_0)\| =$$
$$= |(y^* \circ T)(x_0)| = |y^*(T(x_0))| \underset{(**)}{=} \|T(x_0)\| \underset{(*)}{>} \|T\|-\varepsilon$$

Άρα, ισχύει $\|T^*\| \geq \|T\|$ και τελικά
$$\boxed{\|T\| = \|T^*\|.}$$

(ii) $(\Leftarrow)$ Έστω ότι $\boxed{T(X) \subseteq Y \text{ πυκνό}}$, $\overline{T(X)} = Y$.
Τότε ο τελεστής T^* είναι $\boxed{1-1}$.
Έστω $\boxed{T^*(y^*)=0}$ για $y^* \in Y^*$,
τότε $\boxed{0 = T^*(y^*)(x) = y^*(T(x))}$ $\forall x \in X$.
Αφού το σύνολο $T(X) = \{T(x) : x\in X\}$ είναι πυκνό στον Y και $\boxed{y^*|_{T(X)} = 0}$ έχουμε ότι $\boxed{y^* = 0.}$ Αφού, $T^*(y^*)=0 \Rightarrow y^*=0$ ο $\boxed{T^* \text{ είναι } 1-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ Έστω ότι ο τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$ είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ ($T^*(y^*)=0 \Leftrightarrow y^*=0 \quad \forall y^* \in Y^*$)

Θα αποδείξουμε ότι ο <u>υπόχωρος</u> $T(X)$ του Y είναι **πυκνό** υποσύνολό του Y, αποδεικνύοντας, σύμφωνα με το <u>2(iii)</u> του Θεωρήματος <u>Hahn-Banach</u>, ότι για κάθε $y^* \in Y^*$ ώστε $\boxed{y^*(T(x))=0 \ \forall x \in X}$ ισχύει $\boxed{y^*=0}$.

Πράγματι, αν $y^* \in Y^*$ και $y^*(T(x))=0 \ \forall x \in X$ τότε η συνάρτηση $\boxed{T^*(y^*)} \equiv y^* \circ T \boxed{\equiv 0}$ και αφού ο τελεστής T^* είναι 1-1 έχουμε $\boxed{y^*=0}$ Άρα, ο υπόχωρος $T(X)$ του Y είναι **πυκνός**.

(iii) Έστω ότι ο $T: X \to Y$ είναι $\boxed{\text{ισομορφική εμφύτευση}}$ και έστω $\boxed{T^*: Y^* \to X^*}$ ο συζυγής τελεστής, όπου $\boxed{T^*(y^*) = y^* \circ T \quad \forall y^* \in Y^*}$. Τότε ο T^* είναι $\boxed{\text{επί}}$ του X^*. Πράγματι, έστω $\boxed{x^* \in X^*}$ Θεωρούμε την συνάρτηση: $\boxed{z^*: T(X) \to \mathbb{R}}$ με $\boxed{z^*(T(x)) = x^*(x)} \ \forall x \in X$ που είναι καλά ορισμένη, διότι ο T είναι 1-1, προφανώς γραμμική και συνεχής, διότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Άρα, $\boxed{z^* \in (T(X))^*}$.

Από το <u>Πόρισμα 1</u> του Θεωρήματος <u>Hahn-Banach</u> υπάρχει $\boxed{y^* \in Y^*}$ ώστε: $\boxed{\|y^*\| = \|z^*\|}$ και $\boxed{y^*(T(x)) = z^*(T(x))} \ \forall x \in X$.

Τότε: $\forall x \in X$

$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) = z^*(T(x)) = x^*(x)$.

Άρα $T^*(y^*) = x^*$ και άρα $\boxed{T^* \text{ επί}}$.

Κανονική εμφύτευση ενός χώρου με νόρμα στον δεύτερο δυϊκό χώρο του.

Ορισμός Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Η κανονική εμφύτευση του χώρου X στον δεύτερο δυϊκό του χώρο X^{**} ορίζεται ως η συνάρτηση:

$$\boxed{\tau : X \longrightarrow X^{**}} = (X^*)^*$$

όπου: $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X$, και

$$\boxed{\tau(x)(x^*) = x^*(x)} \quad \forall\, x^* \in X^*$$

1. Η συνάρτηση τ είναι $\boxed{\text{καλά ορισμένη}}$, διότι για κάθε $x \in X$ η συνάρτηση $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\tau(x) \in X^{**}}$ καθώς η $\tau(x) : X^* \to \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{γραμμική}}$ $\big(\tau(x)(\lambda x^* + \mu y^*) = (\lambda x^* + \mu y^*)(x) = \lambda x^*(x) + \mu y^*(x) = \lambda \tau(x)(x^*) + \mu \tau(x)(y^*)\big)$

και $\boxed{\text{φραγμένη}}$ διότι:
για κάθε $x \in X$ ισχύει:

$$\|\tau(x)\| = \sup\{|\tau(x)(x^*)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1\} = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \le 1\} \le$$

$$\le \|x\| \quad (\text{διότι } |x^*(x)| \le \|x^*\|\|x\| \le \|x\|) \ \forall\, \|x^*\| \le 1.$$

2. Η συνάρτηση τ είναι $\boxed{\text{γραμμική}}$, διότι ισχύει: για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in X$

$$\tau(\lambda x + \mu y)(x^*) = x^*(\lambda x + \mu y) = \lambda x^*(x) + \mu x^*(y) = \lambda \tau(x)(x^*) + \mu \tau(y)(x^*) = (\lambda \tau(x) + \mu \tau(y))(x^*)$$

και άρα

$$\tau(\lambda x + \mu y) = \lambda \tau(x) + \mu \tau(y). \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x, y \in X.$$

3. Η συνάρτηση τ είναι $\boxed{\text{φραγμένος γραμμικός}}$ τελεστής, διότι για κάθε $x \in X$ ισχύει:

$$\|\tau(x)\| = \sup\{|\tau(x)(x^*)| : x^* \in X^* \text{ με } \|x^*\| \le 1\} = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^* \text{ με } \|x^*\| \le 1\} \le$$

$$\le \|x\| \quad (\text{διότι } |x^*(x)| \le \|x^*\|\|x\| \le \|x\|)$$

Άρα, $\|\tau\| \le 1$, καθώς $\boxed{\|\tau(x)\| \le \|x\| \quad \forall\, x \in X}$

Πρόταση Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Ο γραμμικός τελεστής $\tau : X \to X^{**}$ είναι ισομετρική εμφύτευση, δηλαδή
$$\|x\| = \|\tau(x)\| \quad \forall\, x \in X$$

(ii) $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \quad \forall\, x \in X$

Απόδειξη

(i) Αποδείξαμε ότι $\boxed{\|\tau(x)\| \leq \|x\|}$ $\forall\, x \in X$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\boxed{\|x\| \leq \|\tau(x)\| \ \forall\, x \in X}$

Αν $x = 0$, τότε προφανώς $\|x\| = 0 \leq \|\tau(x)\|$ ισχύει!

Αν $x \neq 0$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2(ii) του Θεωρήματος Hahn-Banach, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε:
$$x^*(x) = \|x\| \neq 0.$$

Άρα, $\|x\| = |x^*(x)| = |\tau(x)(x^*)| \leq \|\tau(x)\| \cdot \|x^*\| = \|\tau(x)\|$.

Επομένως, $\boxed{\|x\| \leq \|\tau(x)\|}$ $\forall\, x \in X$, άρα $\|x\| = \|\tau(x)\|$

(ii) $\|x\| = \|\tau(x)\| = \sup\{|\tau(x)(x^*)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$
$= \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \quad \forall\, x \in X.$

Ορισμός Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι <u>αυτοπαθής</u> αν η κανονική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$, όπου $\tau(x) \in X^{**}$ $\forall\, x \in X$ και
$$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \quad \forall\, x^* \in X^*$$
είναι ισομετρία $\boxed{\text{επί}}$ του X^{**}.

Πρόταση

Κάθε αυτοπαθής χώρος με νόρμα είναι χώρος Banach.

Πράγματι αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής, τότε είναι, σύμφωνα με τον ορισμό, ισομετρικός με τον $X^{**} = (X^*)^*$, που είναι χώρος Banach ως συζυγής χώρος, άρα ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach.

Παρατηρηση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Αν υπάρχει μια συνάρτηση $f: X \to X^{**}$ που είναι **ισομετρία** και **επί** του X^{**}, τότε **δεν** ισχύει απαραίτητα ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυτοπαθής χώρος με νόρμα.

Ο R. C. James το 1951 έδωσε ένα παράδειγμα χώρου Banach που ενώ είναι ισομετρικός με τον δεύτερο δυϊκό χώρο του δεν είναι αυτοπαθής.

Παραδειγματα

1. Κάθε χώρος με νόρμα που δέν είναι χώρος Banach δεν είναι αυτοπαθής, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση.
2. Ο χώρος $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ δέν είναι αυτοπαθής χώρος, διότι ο δυϊκός του χώρος $(\ell^1)^*$ είναι ισομετρικός με τον $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (Μάθημα 8) που δεν είναι διαχωρίσιμος, άρα και ο δεύτερος δυϊκός $(\ell^1)^{**}$ που είναι ισομετρικος με τον $(\ell^\infty)^*$ δεν είναι διαχωρισιμος, (μαθημα 13), ενώ ο ℓ^1 είναι διαχωρίσιμος (μάθημα 7).
3. Ο χώρος $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι αυτοπαθής, διότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικός με τον ℓ^1 και άρα ο $(c_0)^{**}$ ισομετρικός με τον $(\ell^1)^*$ που είναι ισομετρικός με τον ℓ^∞. Άρα, ο $(c_0)^{**}$ είναι μη διαχωρίσιμος ενώ ο c_0 είναι διαχωρίσιμος και άρα ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής