Πόρισμα 2

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε:

(i) Για κάθε $Y \subseteq X$ κλειστό γραμμικό υπόχωρο του X και $x_0 \in X \setminus Y$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε: $\|x^*\| = 1$, $x^*(x) = 0 \ \forall x \in Y$ και $x^*(x_0) = \rho(x_0, Y) > 0$, όπου $\rho(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} > 0$

(ii) Για κάθε $x_0 \in X$ ώστε $x_0 \neq 0$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε: $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.

Γενικά για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x) \neq x^*(y)$.

(iii) Έστω $Y \subseteq X$ υπόχωρος του X. Τότε: το σύνολο Y είναι πυκνό στον X αν και μόνο αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει:
$$x^*(x) = 0 \ \forall x \in Y \iff x^* = 0$$

Απόδειξη

(i) Θέτουμε $Z = Y \oplus \mathbb{R}x_0 = \{z = y + \lambda x_0 : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Παρατηρούμε ότι κάθε $z \in Z$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $z = y + \lambda x_0$, διότι αν $z = y_1 + \lambda_1 x_0$, τότε $y - y_1 = x_0(\lambda_1 - \lambda) \in Y$ και $x_0 \notin Y$, άρα $\lambda = \lambda_1$ και $y = y_1$.
Ορίζουμε την συνάρτηση $z^* : Z \to \mathbb{R}$ με
$$\boxed{z^*(y + \lambda x_0) = \lambda c} \quad \text{όπου } \boxed{c = \rho(x_0, Y) > 0}$$
[αν $\rho(x_0, Y) = 0 = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$, τότε υπάρχει $(y_n) \subseteq Y$ ώστε $\|x_0 - y_n\| \to 0 \iff y_n \to x_0$, άρα $x_0 \in \overline{Y} = Y$, άτοπο]

Προφανώς η συνάρτηση z^* είναι γραμμική και φραγμένη (συνεχής) διότι:
$$\|z^*\| = \sup\left\{\frac{\lambda \cdot c}{\|y + \lambda x_0\|} : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } y + \lambda x_0 \neq 0\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{\lambda \cdot c}{\|y + \lambda x_0\|} : y \in Y \text{ και } \lambda \neq 0\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{c}{\|\frac{y}{\lambda} + x_0\|} : y \in Y \text{ και } \lambda \neq 0\right\}$$
$$= \frac{c}{\inf\{\|y + x_0\| : y \in Y\}} = 1$$

Επομένως, απο τό προηγούμενο Πόρισμα 1
υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = \|z^*\| = 1$ και
$$x^*(x) = z^*(x) \quad \forall \; x = y + \lambda x_0 \in Z.$$
Άρα $x^*(x_0) = z^*(x_0) = c = \rho(x_0, Y) > 0$ και $x^*(x) = 0 \;\; \forall x \in Y.$

(ii) Έστω $x_0 \in X$ και $x_0 \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \notin Y = \{0\}$.
Από την προηγούμενη Πρόταση (i), υπάρχει
$x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x_0) = \rho(x_0, \{0\}) = \|x_0\| > 0$

Γενικα:
Αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε $x - y \neq 0$, επομένως
υπάρχει $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ και
$x^*(x-y) = x^*(x) - x^*(y) = \|x - y\| \neq 0.$
Άρα, $x^*(x) \neq x^*(y).$

(iii) Έστω $Y \subsetneq X$ υπόχωρος του X,
Αν $\overline{Y} = X$ και $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(y) = 0 \quad \forall y \in Y$,
τότε $\forall \; x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(y_n) \subseteq Y$
ώστε $y_n \to x \Leftrightarrow \|y_n - x\| \to 0.$
Τότε $x^*(y_n) \to x^*(x)$. Αφού $x^*(y_n) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$,
έχουμε ότι $x^*(x) = 0 \quad \forall x \in X$. Άρα $x^* = 0.$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Πρόταση 3 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αν X^*, ο συζυγής του X, είναι διαχωρίσιμος χώρος με την συνήθη νόρμα τελεστή, τότε και ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη

Έστω ότι ο $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος. Τότε το σύνολο $S_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με την μετρική $\rho(x^*, y^*) = \|x^* - y^*\|$ $\forall x^*, y^* \in S_{X^*}$.

Έστω $\boxed{\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S_{X^*}}$ πυκνό, στον μετρικό χώρος (S_{X^*}, ρ), όπου

$\rho(x^*, y^*) = \sup\{|x^*(x) - y^*(x)| : x \in X, \|x\| = 1\}$,

$\forall x^*, y^* \in S_{X^*}$.

Αφού $\|x_n^*\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in X$ με $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\boxed{|x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $Y = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$.

Ο $Y \subseteq X$ είναι προφανώς γραμμικός υπόχωρος του X, άρα η κλειστότητά του $\overline{Y} \subseteq X$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος του X, $(\lambda x + \mu y \in \overline{Y}$ $\forall x, y \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Ισχυρισμός: $\boxed{\overline{Y} = X.}$

Έστω $\overline{Y} \subsetneqq X$. Ο $\overline{Y}$ είναι κλειστός, γραμμικός υπόχωρος του X, αφού ο Y είναι υπόχωρος του X. Έστω $x_0 \in X \setminus \overline{Y} \neq \emptyset$, τότε, από το προηγούμενο Πόρισμα 2 (i) υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\boxed{\|x^*\| = 1}$, ώστε $\boxed{x^*(x) = 0 \ \forall x \in Y}$ και $\boxed{x^*(x_0) = \rho(x_0, \overline{Y}) > 0}$.

Αφού το σύνολο $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S_{X^*}$ πυκνό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε: $\boxed{\|x^* - x_n^*\| < \frac{1}{2}}$.

Όμως $\|x_n^* - x^*\| \geq |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| = |x_n^*(x_n)| > \frac{1}{2}$, (αφού $x^*(x_n) = 0$, διότι $x_n \in Y$) Άτοπο! Άρα, $\boxed{\overline{Y} = X}$.

Θέτουμε $A = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}\} \subseteq X$. Το A είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $(X, \|\cdot\|)$, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος.

Παρατήρηση

Το αντίστροφο της Πρότασης 3 δέν ισχύει:
Πράγματι, όπως αποδείξαμε ο χώρος $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ είναι **διαχωρίσιμος**, όμως ο συζυγής χώρος του $(\ell^1)^*$, που είναι ισομετρικός με τον χώρο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, ο οποίος, όπως αποδείξαμε, **δεν** είναι διαχωρίσιμος, προφανώς δεν είναι διαχωρίσιμος.