Μάθημα 12
Θεώρημα Hahn - Banach

Το σημαντικότερο Θεώρημα στους χώρους με νόρμα, όπως θα παρατηρήσουμε:

Θα αποδείξουμε αρχικά το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος,

$p : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε:

(i) $p(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in X$

(iii) $p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x) \quad \forall\, x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, και

$Y \subseteq X$ ένας γραμμικός υπόχωρος του X,

$\varphi : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση $(\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y))$ και

ώστε: $\boxed{\varphi(y) \leq p(y) \quad \forall\, y \in Y}$

$\boxed{x_0 \in X \setminus Y}$

Θέτουμε: $Z = \{ y + \lambda x_0 : y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{R} \} = Y \oplus \mathbb{R}x_0$

δηλαδή τον μικρότερο υπόχωρο του X που περιέχει το x_0 και τον υπόχωρο Y.

Τότε υπάρχει γραμμική συνάρτηση $\boxed{\psi : Z \to \mathbb{R}}$, ώστε:

(i) Ο περιορισμός $\psi/_Y$ της ψ στο Y να ισούται με την φ: $\boxed{\psi/_Y = \varphi}$ και

(ii) $\boxed{\psi(z) \leq p(z) \quad \forall\, z \in Z} = Y \oplus \mathbb{R}x_0$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι κάθε $z \in Z = Y \oplus \mathbb{R}x_0$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $z = y + \lambda x_0$ για $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ (διότι διαφορετικά θα είχαμε $y_1 - y = (\lambda_1 - \lambda) x_0 \in Y$, αδύνατο $(x_0 \in X \setminus Y)$).

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έστω: $\boxed{f_a : Z \to \mathbb{R}}$ ώστε:

(*) $\boxed{f_a(y+\lambda x_0) = \varphi(y) + \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y}$

Προφανώς η f_a είναι γραμμική $\forall a \in \mathbb{R}$ και επέκταση της φ, άρα ισχύει η συνθήκη (i)

Θα προσδιορισθεί το κατάλληλο $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει και η συνθήκη (ii) δηλαδή, να ισχύει:

$\boxed{f_a(z) \leq p(z) \quad \forall z \in Z}$.

Για κάθε $x, y \in Y$ ισχύει:

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x-y) \leq p(x-y) = p((x+x_0)+(-y-x_0)) \overset{(ii)}{\leq} p(x+x_0) + p(-y-x_0).$$

Άρα,

$\forall x, y \in Y \quad p(x+x_0) - \varphi(x) \geq -\varphi(y) - p(-y-x_0)$. (**)

Επομένως,

το σύνολο $\{p(x+x_0) - \varphi(x) : x \in Y\}$ είναι κάτω φραγμένο

και το σύνολο $\{-\varphi(y) - p(-y-x_0) : y \in Y\}$ άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Από αξίωμα πληρότητας του $\mathbb{R}$ υπάρχουν: $\{-\varphi(y)-p(-y-x_0) : y \in Y\} \in \mathbb{R}$,

$s = \sup\{-\varphi(y) - p(-y-x_0) : y \in Y\} \in \mathbb{R}$.

$t = \inf\{p(y+x_0) - \varphi(x) : y \in Y\} \in \mathbb{R}$.

από την ιδιότητα (**) έχουμε:

$$\boxed{s \leq t}$$

Επιλέγουμε $s \leq a \leq t$ τότε: $\forall y \in Y$

(***) $\boxed{-\varphi(y) - p(-y-x_0) \leq a \leq p(y+x_0) - \varphi(y)}$

Θέτουμε $\boxed{\psi = f_a} : Z \to \mathbb{R}$,

Ισχύει $\boxed{\psi|_Y = \varphi}$ από την ισότητα (*)

Άρα, ισχύει ισότητα (i).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\boxed{\psi(z) \leq p(z) \quad \forall z = y + \lambda x_0 \in Z}$

ισοδύναμα

(****) $\boxed{f_a(y+\lambda x_0) \leq p(y+\lambda x_0) \quad \forall y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}}$

<u>Περίπτωση 1 $[\lambda = 0]$</u>, άρα $z = y \in Y$. Τότε:

$$f_a(z) = \psi(z) = \psi(y) = \varphi(y) \leq p(y) = p(z),$$

ισχύει.

Περίπτωση 2 $[\lambda > 0]$ και $\boxed{z = y + \lambda x_0 \in Z}$

Έχουμε $\boxed{a \leq t \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)}$ από την (***), άρα

$$f_a(z) = \underbrace{\psi(z) = \varphi(y) + \lambda a}_{\text{ορισμός } \psi} \leq \varphi(y) + \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \lambda \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) = (\varphi \text{ γραμμική})$$

$$= \lambda \cdot p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) = p(y + \lambda x_0) = p(z).$$

Περίπτωση 3 $[\lambda < 0]$ $\boxed{z = y + \lambda x_0 \in Z}$

Έχουμε $-p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq a$ από την (***),

άρα για $\lambda < 0$

$$f_a(z) = \underbrace{\psi(z) = \lambda a + \varphi(y)}_{\text{ορισμός}} \leq -\lambda p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - \lambda \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \varphi(y) =$$

$$-\lambda p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) = p(y + \lambda x_0) = p(z).$$

Επομένως, $\psi(z) = f_a(z) \leq p(z) \ \forall z \in Z.$

Λήμμα Zorn

Έστω $(X, \leq)$ ένα μη κενό, (μερικά) διατεταγμένο σύνολο, ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο A του X έχει άνω φράγμα (δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $y \leq x_0 \ \forall y \in A$), τότε το X έχει μεγιστικό στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε αν $y \in X$ και $x \leq y$, τότε $x = y$.

Θεώρημα (Hahn-Banach (αναλυτική μορφή))

Έστω X διανυσματικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε:

$$p(x) \geq 0$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x)$$

$\forall\ x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

Αν $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X και $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ γραμμική και $\boxed{\varphi(x) \leq p(x)\ \forall x \in Y}$

τότε υπάρχει $\psi : X \to \mathbb{R}$ γραμμική, $\boxed{\psi(x) \leq p(x)\ \forall x \in X}$ και $\boxed{\psi/_Y = \varphi}$.

Απόδειξη

Εφαρμόζεται το Λήμμα του **Zorn**

Έστω $\Gamma = \{ (Z, f_Z) : Z \subseteq X$ υπόχωρος του X με $Y \subseteq Z$ και $f_Z : Z \to \mathbb{R}$ γραμμική ώστε: $f_Z|_Y = \varphi$, και $f_Z(x) \leq p(x)\ \forall z \in Z \}$.

Προφανώς $\Gamma \neq \emptyset$, αφού $(Y, \varphi) \in \Gamma$.

Στο σύνολο Γ ορίζεται η διάταξη:

$$(Z_1, f_{Z_1}) \propto (Z_2, f_{Z_1}) \iff Z_1 \subseteq Z_2 \text{ και } f_{Z_1} = f_{Z_2}/_{Z_1}$$

Έστω $\Delta = \{ (Z_i, f_{Z_i}) : i \in I \} \subseteq \Gamma$, ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Γ.

Θέτουμε $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ και $f_Z : Z \to \mathbb{R}$ με $f_Z(x) = f_{Z_i}(x)$ αν $x \in Z_i$.

Τότε $(Z, f_Z) \in \Gamma$ και είναι άνω φράγμα του συνόλου Δ.

Από το Λήμμα Zorn το Γ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω το $(H, f_H) \in \Gamma$.

Θα αποδείξουμε ότι $\boxed{H = X}$

Αν $H \subsetneq X$, έστω $x_0 \in X \setminus H$. Θέτουμε $Z = \langle H \cup \{x_0\} \rangle$ τον υπόχωρο που παράγεται από το $H \cup \{x_0\}$.

Από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει $f_Z : Z \to \mathbb{R}$ ώστε $f_Z/_H = f_H$ και $f_Z(x) \leq p(x)\ \forall\ x \in Z$.

Άρα, $(Z, f_Z) \in \Gamma$. Επίσης $(Z, f_Z) \neq (H, f_H)$ και $(H, f_H) \propto (Z, f_Z)$. Άτοπο! Άρα $\boxed{H = X}$. Θέτουμε $\boxed{\psi = f_H}$.

Τότε $\psi(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$ και $\psi/_Y = \varphi$, το ζητούμενο.

Πόρισμα 1 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X. Αν $y^* \in Y^*$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε:

$$\|x^*\| = \|y^*\| \quad \text{και} \quad x^*(x) = y^*(x) \quad \forall\, x \in Y.$$

Απόδειξη

Έστω $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X και $Y \neq X$. Θέτουμε:

$p: X \to \mathbb{R}$ με $\boxed{p(x) = \|y^*\| \cdot \|x\|}$ $\forall\, x \in X$.

Προφανώς: $p(x) \geq 0$ $\forall\, x \in X$,

$\forall\, x, y \in X$, $p(x+y) = \|y^*\| \cdot \|x+y\| \leq \|y^*\|(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$

και $\forall\, x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \|y^*\| \|\lambda x\| = \|y^*\| \cdot |\lambda| \|x\| = |\lambda| \cdot \|y^*\| \cdot \|x\| = \lambda \cdot p(x)$.

Έχουμε $y^* \in Y^*$, άρα $y^*: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική και

$$y^*(x) \leq |y^*(x)| \leq \|y^*\| \cdot \|x\| = p(x) \quad \forall\, x \in Y.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\varphi: X \to \mathbb{R}$ γραμμική ώστε: $|\varphi(x)| \leq p(x) = \|y^*\| \|x\|$ $\forall x \in X$ (*) και $\varphi/_Y = y^*$. Θέτουμε: $\boxed{x^* = \varphi \in X^*}$. Τότε $x^*(x) = y^*(x)$ $\forall x \in Y$

και $|x^*(x)| = |\varphi(x)| \overset{(*)}{\leq} \|y^*\| \|x\|$ $\forall\, x \in X$. Άρα, $\boxed{\|x^*\| \leq \|y^*\|}$.

Επίσης, αφού $Y \subseteq X$ και $x^*/_Y = \varphi/_Y = y^*$ έχουμε

$\|y^*\| = \sup\{|y^*(x)| : x \in Y \text{ και } \|x\| \leq 1\} \leq$

$\leq \|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in X \text{ και } \|x\| \leq 1\}$, άρα

$\boxed{\|y^*\| \leq \|x^*\|}$ και τελικά $\|y^*\| = \|x^*\|$.