(9) Ο χώρος $\ell^\infty(\Gamma)=\{f:\Gamma\to\mathbb{R} : f \text{ φραγμένη}\}\subseteq F(\Gamma)$.
[όπου $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ φραγμένη αν υπάρχουν $m, M\in\mathbb{R}$ ώστε: $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in\Gamma$, ισοδύναμα αν υπάρχει $\Theta\in\mathbb{R}$ ώστε

$$|f(x)|\le\Theta \quad \forall\, x\in\Gamma]$$

είναι διανυσματικός χώρος, διότι προφανώς για κάθε $f, g\in\ell^\infty(\Gamma)$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι η συνάρτηση

$$\lambda f+\mu g:\Gamma\to\mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη}$$

(10) Ο χώρος $C([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ συνεχής}\}\subseteq F([a,b])$ είναι διανυσματικός χώρος, διότι αν $f, g\in C([a,b])$, τότε $\lambda f+\mu\cdot g\in C[a,b]$ για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Ορισμός
Ένας διανυσματικός χώρος είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης $k\in\mathbb{N}$, αν υπάρχουν $x_1,\dots,x_k\in X$ που είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δηλαδή ισχύει: $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k=0$ για $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\lambda_1=\dots=\lambda_k=0$.) και

$$X=\{\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k : \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}\}.$$

Το σύνολο $\{x_1,\dots,x_k\}$ λέγεται **βάση** του X

Παράδειγμα ο $\mathbb{R}^n$ είναι διάστασης n και το σύνολο $\{e_1,\dots,e_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, όπου

$$e_k=(e_{ki})_{i=1}^n \quad \text{όπου } e_{ki}=0 \text{ αν } k\ne i,\quad e_{kk}=1$$

...γραμμικός χώρος X είναι απειροδιάστατος ... $\neq \phi$ και δεν έχει πεπερασμένη διάσταση, ... ή περιέχει άπειρο πλήθος γραμμικά ...ξάρτητων στοιχείων.

...ομένως ο X έχει άπειρη διάσταση αν ...πάρχει $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ ώστε:

...για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \vec{0} \iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \vec{0})$

<u>Παραδείγματα</u>

1. Ο $\mathbb{R}^k$ για $k \in \mathbb{N}$ έχει πεπερασμένη διάσταση k. $\{e_1, \ldots, e_k\}$

2. Ο χώρος $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ συνεχής}\}$ είναι απειροδιάστατος γραμμικός χώρος, καθώς το σύνολο $\{1, t, \ldots, t^n, \ldots\} \subseteq C([a,b])$ είναι άπειρο και περιέχει γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.

Πράγματι, έστω $p(t) = \lambda_0 t^0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n = \vec{0}$ $\forall t \in [a,b]$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι:

$$p^{(n)}(t) = n!\, \lambda_n = 0.$$

Άρα, $\lambda_n = 0$. Ανάλογα έχουμε $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Επομένως το σύνολο $\{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ είναι άπειρο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $C([a,b])$, και άρα ο $C([a,b])$ είναι απειροδιάστατος γραμμικός χώρος.

3. Οι χώροι ℓ^p για $1 \le p \le \infty$ είναι απειροδιάστατοι γραμμικοί χώροι, και επίσης οι χώροι c_0, c, s είναι απειροδιάστατοι υποχώροι του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το σύνολο:

$$A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ όπου } e_n = (e_n^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ με } e_n^k = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = n \\ 0 & \text{αν } k \neq n \end{cases}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο των γραμμικών χώρων ℓ^p για $1 \le p \le \infty$ και των γραμμικών χώρων c_0, c, s.

Επίσης, το A είναι άπειρο σύνολο.

Ορισμός

Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση $T: X \to Y$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall\, x, y \in X$, και

(2) $T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

Ο διανυσματικός χώρος $L(X,Y)$

Έστω X, Y δύο διανυσματικοί χώροι, $T, S: X \to Y$ δύο γραμμικοί τελεστές και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε:

$T+S: X \to Y$ συνάρτηση ώστε:

$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \quad \forall\, x \in X$, και

$(\lambda T)(x) = \lambda \cdot T(x) \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις $T+S$, λT είναι γραμμικοί τελεστές

Ορίζουμε τώρα το σύνολο:

$$L(X,Y) = \{T: X \to Y : T \text{ γραμμικός τελεστής}\}$$

Το σύνολο $L(X,Y)$ με τις πράξεις:

$(T,S) \to T+S$, $\quad (\lambda, T) \to \lambda T$

είναι διανυσματικός χώρος. (Άσκηση)

Συμπερασματικά

1. $C([a,b])$, $\ell^p \ \forall\, 1 \leq p \leq \infty$, c_0, c, s απειροδιάστατοι διανυσματικοί χώροι
2. $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ πεπερασμένης διάστασης k, διανυσματικός χώρος
3. $L(X,Y)$ διανυσματικός χώρος, όπου X, Y διανυσματικοί χώροι

Μετρικοί χώροι – Διαχωρισιμότητα.

Ορισμός Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε:

(i) $\rho(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$.

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x,y \in X$.

(iii) $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y \quad \forall\, x,y \in X$.

(iv) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in X$.

λέγεται μετρική στο χώρο X.
Το ζεύγος (X,ρ) λέγεται μετρικός χώρος.

Παραδείγματα

① $(\mathbb{R},\rho)$, όπου $\rho: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = |x-y|$

② $(\mathbb{R}^k, \rho_q)$, όπου $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}$, $1 \leq q < +\infty$ και $\rho_q: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

με $\rho_q((x_1,\dots,x_k),(y_1,\dots,y_k)) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

③ $(\mathbb{R}^k, \rho_\infty)$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $\rho_\infty: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

με $\rho_\infty((x_1,\dots,x_k),(y_1,\dots,y_k)) = \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_k-y_k|\}$

Είναι μετρικοί χώροι, καθώς ισχύουν οι ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού προφανώς.

· Η ιδιότητα (iv) για το Παράδειγμα ① ισχύει διότι: $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.

Η ιδιότητα (iv) για το Παράδειγμα ③ ισχύει διότι:

$$\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_k-y_k|\} = |x_{n_0}-y_{n_0}| \leq |x_{n_0}-z_{n_0}| + |z_{n_0}-y_{n_0}|$$
$$\leq \max\{|x_1-z_1|,\dots,|x_k-z_k|\} + \max\{|z_1-y_1|,\dots,|z_k-y_k|\}$$

Η ιδιότητα (iv) για το Παράδειγμα ② ισχύει από την ανισότητα Minkowski:

αν $1 \leq p < +\infty$ και $x_1,\dots,x_k,\ y_1,\dots,y_k \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |z_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Παραδείγματα μετρικών χώρων (συνέχεια)

(1) $\ell^\infty = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$

$\rho_\infty((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \ \forall (x_n),(y_n) \in \ell^\infty$

(2) $c_0 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subseteq \ell^\infty$

$\rho_0((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \ \forall (x_n),(y_n) \in c_0$

(3) Για κάθε $1 \leq p < +\infty$

$$\ell^p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

$$\rho_p((x_n),(y_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \forall (x_n),(y_n) \in \ell^p$$

μετρικοί χώροι

Παρατηρούμε ότι: $\boxed{c_0 \subseteq \ell^\infty}$, διότι κάθε μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι φραγμένη.

(1) Επίσης η $\rho_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ είναι μετρική, διότι: προφανώς (i) $\rho_\infty((x_n),(y_n)) \geq 0$,

(ii) $\rho_\infty((x_n),(y_n)) = 0 \Leftrightarrow |x_n - y_n| = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_n) = (y_n)$,

(iii) $\rho_\infty((x_n),(y_n)) = \rho_\infty((y_n),(x_n))$ και

(iv) $\rho_\infty((x_n),(y_n)) \leq \rho_\infty((x_n),(z_n)) + \rho_\infty((z_n),(y_n))$

(διότι $\forall n \in \mathbb{N}$

$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \leq \rho_\infty((x_n),(z_n)) + \rho_\infty((z_n),(y_n))$).

Αφού η ρ_∞ είναι μετρική στο ℓ^∞

(2) και η $\rho_0 = \rho_\infty /_{c_0 \times c_0}$ είναι μετρική στο $c_0 \subseteq \ell^\infty$, ως περιορισμός της ρ_∞ στο $c_0 \times c_0$.

(3) Επίσης ρ_p είναι μετρική στο ℓ^p για $1 \leq p < \infty$.

Κατ' αρχάς η συνάρτηση ρ_p είναι <u>καλά ορισμένη</u>, διότι από την ανισότητα Minkowski, αν $(x_n),(y_n) \in \ell^p$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Επίσης άμεσα έχουμε ... ρ

(4) $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχης} \}$
Κάθε $f \in C[a,b]$ είναι φραγμένη συνάρτηση και μάλιστα ολοκληρώσιμη.
Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις μετρικές:

$$\rho_\infty(f,g) = \sup\{ |f(x)-g(x)| : x \in [a,b] \} < \infty$$

και

$$\rho_1(f,g) = \int_a^b |f-g|(x)\,dx \qquad \forall f,g \in C[a,b].$$

(5) Σε κάθε μη κενό σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε την διακριτή μετρική

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x=y \\ 1 & \text{αν } x \neq y \end{cases} \qquad \forall x,y \in X.$$

(6) Αν $(X_1,\rho_1), (X_2,\rho_2), \dots, (X_n,\rho_n)$ είναι μετρικοί χώροι, τότε στο καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times \dots \times X_n$ ορίζονται οι μετρικές:

$\rho_p : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbb{R}$ όπου $1 \le p \le \infty$ ως:

$$\forall\, 1 \le p < \infty \quad \rho_p : ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n \rho_i(x_i,y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p = \infty \quad \rho_\infty : ((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max\{ \rho_i(x_i,y_i) : i=1,\dots,n \}$$

(7) Αν (X,ρ) μετρικός χώρος, τότε θέτοντας

$$\sigma(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\} \quad \forall x,y \in X$$

έχουμε μια (ισοδύναμη) μετρική $\sigma \le 1$ (φραγμένη).

(8) Αν Αν (X,ρ) μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$, τότε $(Y, \rho/_{Y \times Y})$ είναι μετρικός χώρος

(9) Αν $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x,y) \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε στο καρτεσιανό γινόμενο

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X_n \ \forall n \in \mathbb{N} \}$$

ορίζεται η μετρική:

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$$

(μετρική γινόμενο στο X)
(άσκηση)

Βασικές έννοιες μετρικών χώρων

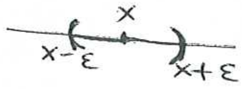
(1)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
Ορίζεται η
ανοικτή σφαίρα κέντρου $x\in X$ και ακτίνας $\varepsilon>0$

$$S(x,\varepsilon)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<\varepsilon\}.$$

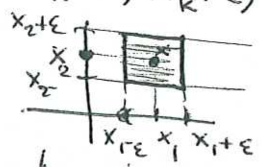
Παραδείγματα

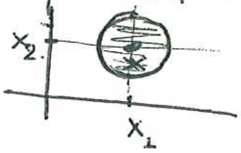
1. $X=(\mathbb{R},\rho)$ $\quad S(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.



2. $X=(\mathbb{R}^k,\rho_\infty)$ $\quad S((x_1,\dots,x_k),\varepsilon)=(x_1-\varepsilon,x_1+\varepsilon)\times\dots\times(x_k-\varepsilon,x_k+\varepsilon)$

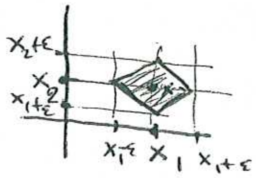
3. $X=(\mathbb{R}^k,\rho_2)$ $\quad S((x_1,x_2),\varepsilon)$ $\qquad k=2$





4. $X=(\mathbb{R}^k,\rho_1)$ $\quad S((x_1,x_2),\varepsilon)$

ισοδύναμες μετρικές



Ορισμοί

(1) Ένα στοιχείο $x\in A\subseteq X$ λέγεται <u>εσωτερικό σημείο</u> του A αν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $x\in S(x,\varepsilon)\subseteq A$.

(2) Ένα υποσύνολο A του X είναι <u>ανοικτό</u> αν κάθε στοιχείο του είναι εσωτερικό σημείο.
Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A λέγεται εσωτερικό του A και συμβολίζεται με A^o.
Δηλαδή, $\boxed{A^o=\{x\in A:\ \text{υπάρχει } \varepsilon>0 \text{ ώστε } S(x,\varepsilon)\subseteq A\}}$
Επομένως,
$$\boxed{A\subseteq X \text{ ανοικτό} \iff A=A^o \iff \forall x\in A\ \exists\,\varepsilon>0: S(x,\varepsilon)\subseteq A}$$

(3) Ένα υποσύνολο B του $A\subseteq X$ είναι <u>κλειστό</u> αν το συμπλήρωμά του $X\setminus A$ είναι ανοικτό.
$$\boxed{A\subseteq X \text{ κλειστό} \iff X\setminus A\subseteq X \text{ ανοικτό}}$$

Άμεσα από τους ορισμούς έχουμε ότι:
Αν (X,ρ) μετρικός χώρος, τότε:
(1) $\emptyset$, X είναι ανοικτά (και κλειστά) σύνολα.
(2) Η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
(3) Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(Οι τρεις αυτές ιδιότητες αποτελούν την βάση για την θεμελίωση της Θεωρίας των τοπολογικών χώρων.)

Αντίστοιχα άμεσα από τους ορισμούς έχουμε:

Αν (X, ρ) μετρικός χώρος τότε:

(1) ϕ, X είναι κλειστά σύνολα.

(2) Η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

(3) Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Ορισμός

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.
Η κλειστότητα $\overline{A}$ του A ορίζεται:

$$\overline{A} = \{x \in X : S(x, \varepsilon) \cap A \neq \phi \text{ για κάθε } \varepsilon > 0\}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το A.
Άρα, $A \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν $\overline{A} = A$.

$$\boxed{A \subseteq X \text{ κλειστό} \Longleftrightarrow A = \overline{A}}$$

Πρόταση

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ισχύουν:

(i) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{o}$

($x \in \overline{X \setminus A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; S(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \phi \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; S(x, \varepsilon) \nsubseteq A \Leftrightarrow x \notin A^{o} \Leftrightarrow x \in X \setminus A^{o}$.

(ii) $(X \setminus A)^{o} = X \setminus \overline{A}$

($x \in (X \setminus A)^{o} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$
$\Leftrightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \cap A = \phi \Leftrightarrow$
$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus \overline{A}$.)

Ορισμός

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.
Το A λέγεται **πυκνό** υποσύνολο του X αν $\overline{A} = X \Longleftrightarrow \forall x \in X$ και $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $S(x, \varepsilon) \cap A \neq \phi$

Ορισμός

Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι **διαχωρίσιμος** αν έχει ένα **αριθμήσιμο** υποσύνολο $A \subseteq X$ το οποίο είναι **πυκνό** στο X, δηλαδή $\overline{A} = X$.

Διαχωρίσιμοι χώροι

(i) Ο χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$, όπου $\rho(x,y)=|x-y|$ για $x,y\in\mathbb{R}$ είναι **διαχωρίσιμος** διότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $\mathbb{R}$ ($(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0 \Leftrightarrow \overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$)

(ii) Ο Ευκλείδειος χώρος $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$, όπου $k\in\mathbb{N}$ και $\rho_2((x_1,\dots,x_k),(y_1,\dots,y_k))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_k-y_k)^2}$ είναι **διαχωρίσιμος**, διότι $S(x,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}^k\neq\emptyset$ $\forall \varepsilon>0, x\in\mathbb{R}^k$ και $\mathbb{Q}^k$ αριθμήσιμο.

(iii) Ο χώρος ακολουθιών (ℓ^p, ρ_p) για $1\leq p<\infty$ είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, το σύνολο:

$$D=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p : x_n\in\mathbb{Q} \text{ και } \{n\in\mathbb{N}: x_n\neq 0\} \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον ℓ^p.

Πράγματι, το D είναι **αριθμήσιμο**, ως **ισοπληθικό** με το αριθμήσιμο σύνολο των **πεπερασμένων υποσυνόλων** του $\mathbb{Q}$, που είναι αριθμήσιμο.

Το σύνολο D είναι και **πυκνό** υποσύνολο του ℓ^p, διότι για **κάθε** $\varepsilon>0$ και $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ ισχύει:

$$S(y,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset.$$

Πράγματι, για $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ και $\varepsilon>0$ υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p-\sum_{n=1}^{m}|y_n|^p=\sum_{n=m+1}^{\infty}|y_n|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

Επίσης για κάθε $n\in\{1,\dots,m\}$ υπάρχει $q_n\in\mathbb{Q}$ ώστε:

$$|q_n-y_n|^p<\frac{\varepsilon}{2m}.$$

Θέτουμε $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p$ ώστε:

$$x_n=q_n \text{ αν } n\in\{1,\dots,m\} \text{ και } x_n=0 \text{ αν } n>m.$$

Προφανώς $x\in D$. Επίσης

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{m}|q_n-y_n|^p+\sum_{n=m+1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<$$

$$<\left(\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}=\varepsilon$$

Άρα, $S(y,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset$, και επομένως το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του ℓ^p, οπότε ο χώρος (ℓ^p, ρ_p) διαχωρίσιμος.

(iv) Ο χώρος ακολουθιών (c_0, ρ_0),
όπου $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$ και
$\rho_0 : c_0 \times c_0 \to \mathbb{R}$ με $\rho_0((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$
είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Πράγματι, το σύνολο

$$D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{Q} \text{ και } \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\} \text{ πεπερασμένο}\}$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του c_0.
Το D είναι πυκνό, διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και
$y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ ισχύει: $S(y,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Πράγματι,
εφ' όσον $y \in c_0$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\boxed{|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ n \geq m_0,\ n \in \mathbb{N}}$$

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n < m_0$ υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$
ώστε:

$$\boxed{|q_n - y_n| < \varepsilon/2. \quad n < m_0}$$

Θέτουμε $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:

$$x_n = q_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}\ n < m_0 \quad \text{και}$$
$$x_n = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}\ n \geq m_0$$

Προφανώς $x \in D$ και επίσης

$$\rho_0(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq$$
$$\max\left(\max\{|q_n - y_n| : n < m_0\}, \sup\{|y_n| : n \geq m_0\}\right) < \varepsilon$$

(v)
Ο χώρος $(\ell^\infty, \rho_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος:
$\ell^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\}$
$\rho_\infty((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall\ (x_n),(y_n) \in \ell^\infty$

Πράγματι το σύνολο

$$A = \{(x_n) : x_n \in \{0,1\}\} \equiv \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$$

είναι υπεραριθμήσιμο, σύμφωνα με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor και $\rho_\infty((x_n),(y_n)) \geq 1$
Επομένως το σύνολο

$$B = \{S((x_n), \tfrac{1}{3}) : (x_n) \in A\}$$

αποτελείται από ξένες ανά δύο ανοικτές σφαίρες του ℓ^∞ και είναι υπεραριθμήσιμο.
Συνεπώς κάθε πυκνό υποσύνολο του ℓ^∞ θα είναι υπεραριθμήσιμο!

(vi) Ο χώρος $C([a,b]) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$

$0! = 1 \quad 1! = 1, \ldots, n! = 1\cdot 2 \cdots n \ \forall n\in\mathbb{N} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Λήμμα 1 Έστω $0\le x\le 1$ και $n\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ Τότε:

$$\boxed{(i)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1}$$

$$\left[1=(x+(1-x))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$

$$\boxed{(ii)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x}$$

[Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$(**)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k b^{n-k}=(t+b)^n \quad \forall t\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$$

Θεωρώντας το t ως μεταβλητή στην ισότητα $(**)$ παραγωγίζοντας ως προς t και πολλαπλασιάζοντας επί t έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k b^{n-k}=nt(t+b)^{n-1} \qquad (***)$$

Θέτοντας $t=x$ και $b=1-x$ έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx.$$

Άρα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x.$]

$$(iii)\ \boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t την $(***)$ και πολλαπλασιάζοντας επί t έχουμε: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}t^k b^{n-k}=n(n-1)t^2(t+b)^{n-2}+nt(t+b)^{n-1}$ και

Θέτοντας $\boxed{t=x}$ και $\boxed{b=1-x}$ έχουμε $t+b=1$

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2+nx \iff$$

διαιρώντας με n^2

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x \qquad (****)$$

Άρα, από τις ισότητες (i), (ii) και $(****)$ προκύπτει η (iii).

(vi) Ο χώρος $C([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f \text{ συνεχής}\}$ με την μετρική $d_\infty(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)| : x\in[a,b]\}$ για κάθε $f,g\in C([a,b])$ είναι **διαχωρίσιμος**.

Η απόδειξη είναι συνέπεια των επόμενων δύο Θεωρημάτων των Bernstein και Weierstrass αντίστοιχα:

<u>Θεώρημα</u> (Bernstein)

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $B_{n,f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, όπου:

$$B_{n,f}(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \forall x\in[0,1]$$

ώστε:

$$d_\infty(B_{n,f},f)\to 0$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε: $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x,y\in[0,1]$.

Έστω $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\boxed{n\geq \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2\varepsilon}}$ $(\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)| : x\in[0,1]\})$.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$|f(x)-B_{n,f}(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in[0,1],$$

και άρα $d_\infty(B_{n,f},f)\xrightarrow[n]{}0$.

Έστω $x\in[0,1]$. Τότε:

$$|f(x)-B_{n,f}(x)|=\left|f(x)\cdot 1-\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \overset{(*)}{=}$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot\left(\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)\right|\leq$$

$$\left[\text{διότι } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1\right] \ (*)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\varepsilon, \text{ διότι}$$

αν $I=\{k\in\mathbb{N} : 0\leq k\leq n,\ |x-\frac{k}{n}|<\delta\}$ και $(I\cup J=\{0,1,\dots,n\})$

$J=\{k\in\mathbb{N} : 0\leq k\leq n\ \ |x-\frac{k}{n}|\geq\delta\}$,

τότε:

$$\sum_{k\in I}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in I}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

και

$$\sum_{k\in J}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in J}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq$$

$$\leq 2\|f\|_\infty\sum_{k\in J}\binom{n}{k}\frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}\to 0$$

Θεώρημα Weierstrass

Έστω $a<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής.

(i) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε:
$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon \quad \forall\, x\in[a,b],$$
ισοδύναμα:

(ii) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:
$$p_n\to f \text{ ομοιόμορφα} \Leftrightarrow d_\infty(p_n,f)\to 0$$

Απόδειξη

Άμεση από το Θεώρημα Bernstein.

(i) Έστω η συνάρτηση: $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ με
$$\varphi(t)=f(a+t(b-a)) \quad \forall\, t\in[0,1].$$

Η φ είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής.
Από το Θεώρημα Bernstein υπάρχει πολυώνυμο $B_{n,f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ώστε:
$$d_\infty(f,B_{n,f})\to 0$$
Άρα $\forall\,\varepsilon>0$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε:
$$|f(x)-B_{n,f}(x)|<\varepsilon \quad \forall\, x\in[0,1]$$

$n\in\mathbb{N}$ Θέτουμε $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ με:
$$\boxed{p(x)=B_{n,f}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)} \quad \forall\, x\in[a,b]$$

Τότε $|f(x)-p(x)|<\varepsilon \quad \forall\, x\in[a,b]$.

(ii) Έστω $n\in\mathbb{N}$ και για $\varepsilon=\frac{1}{n}$ από (i)
$$|p_n(x)-p(x)|<\frac{1}{n} \quad \forall\, x\in[a,b]$$

Τότε $d_\infty(f,p_n)\to 0$

<u>Πρόταση</u> Ο χώρος $C([a,b])$ με την μετρική $d_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow [0,+\infty)$, $d_\infty(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ είναι διαχωρίσιμος.

<u>Απόδειξη</u>

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

<u>Ισχυρισμός</u>

Έστω $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ $\forall x \in [a,b]$ πολυώνυμο. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$, $b_m, \dots b_1, b_0 \in \mathbb{Q}$ είναι ρητοί αριθμοί και $d_\infty(p,q) < \varepsilon$.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u>

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = \max\{|a|, |b|\}$.

Για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ έστω $b_i \in \mathbb{Q}$ ώστε:

$$|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{M^i (m+1)}$$

Τότε θέτοντας $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε:

$$|p(x) - q(x)| = |(a_m - b_m)x^m + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)| \le$$

$$|a_m - b_m||x|^m + \dots + |a_1 - b_1||x| + |a_0 - b_0| <$$

$$\frac{\varepsilon \cdot M^m}{M^m (m+1)} + \dots + \frac{\varepsilon M}{M(m+1)} + \frac{\varepsilon}{m+1} = \varepsilon.$$

Επομένως $\boxed{d_\infty(p,q) < \varepsilon.}$

Θέτουμε: A το σύνολο πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές.

$$A = \{ q : [a,b] \to \mathbb{R} : q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0, \text{ όπου } m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ b_0, \dots, b_m \in \mathbb{Q} \} \subseteq C[a,b].$$

Το A είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Weierstrass, για κάθε $f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{d_\infty(f,p) < \frac{\varepsilon}{2}}$$

Από τον παραπάνω ισχυρισμό υπάρχει πολυώνυμο $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ με συντελεστές ρητούς αριθμούς ώστε: $d_\infty(p,q) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Επομένως $d_\infty(f,q) < \varepsilon$, $q \in A$.

Άρα, $\overline{A} = C[a,b]$, A αριθμήσιμο, και επομένως $C([a,b])$ διαχωρίσιμος.

Ακολουθίες - Συνέχεια - Ισοδύναμες μετρικές

<u>Ορισμός</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
Μια ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ συγκλίνει στο $x \in X$ (ως προς την ρ) ($x_n \to x$) αν και μόνο αν:
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:
$\rho(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \iff x_n \in S(x,\varepsilon) \ \forall n \geq n_0.$
Άρα, $x_n \to x \iff \rho(x_n, x) \to 0$

<u>Παραδείγματα</u>

1. Στο χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$; $x_n \to x \iff |x_n - x| \to 0$
2. Στο χώρο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$:

$$x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k) \longrightarrow x = (x_1, \ldots, x_n) \iff x_n^i \xrightarrow[n]{} x_i \quad \forall i = 1, \ldots, k$$

3. Αν $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και d η μετρική γινόμενο στο χώρο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ με $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$, τότε:
Μια ακολουθία $x_m = (x_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ συγκλίνει στο $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ αν και μόνο αν:
$d(x_m, x) \to 0 \iff x_n^m \xrightarrow[m]{} x_n \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

<u>Πρόταση</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $\emptyset \neq A \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε:
(i) $x \in \overline{A} \iff$ υπαρχει $(x_n) \subseteq A$ ώστε $x_n \to x$
(ii) $A \subseteq X$ κλειστό $\iff (\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to x \Rightarrow x \in A)$

<u>Πρόταση</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n) \subseteq X$.
Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$, τότε $x = y$.
Πράγματι αν $x \neq y$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε:
$\rho(x_n, x) < \frac{\rho(x,y)}{2}$ και $\rho(x_n, y) < \frac{\rho(x,y)}{2}$. Άτοπο!

<u>Ορισμός</u> Έστω $(x_n) \subseteq X$ μια ακολουθία στο X
Αν $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ λέγεται υπακολουθία της (x_n).

<u>Πρόταση</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n) \subseteq X$ μια ακολουθία στο X. Τότε: για $x \in X$

$x_n \to x \iff$ κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο x.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $x_n \to x$, και (x_{n_k}) υπακολουθία της (x_n).
Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$
Έχουμε ότι η ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, και άρα δεν είναι άνω φραγμένη. Επομένως, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\boxed{n_{k_0} > n_0}$.
Άρα, για κάθε $k \geq k_0$, $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ και άρα

$$\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon \quad \forall \; k \geq k_0$$

Συνεπώς, $x_{n_k} \to x$

($\Leftarrow$) Ισχύει προφανώς.

Πρόταση Αν (X, ρ) μετρικός χώρος, $(x_n) \subseteq X$ και $x \in X$ ώστε (x_n) **δεν** συγκλίνει στο x, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της (x_n) ώστε:

$$\rho(x_{n_k}, x) \geq \varepsilon > 0 \;\; \forall \; k = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι $x_n \not\to x$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για **κάθε** $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\varepsilon < \rho(x_n, x)$, και $n > m$.
Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ ώστε: $(n_k) \subseteq \mathbb{N}$ γνησια αύξουσα ώστε

$$\varepsilon \leq \rho(x_{n_k}, x) \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$$

Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ συνάρτηση, $x_0 \in X$.
Η f είναι **συνεχής** στο x_0 αν: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:
αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$, τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
δηλαδή
$$f(S_\rho(x_0,\delta)) \subseteq S_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$
Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Πρόταση Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Η f συνεχής
(ii) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό το $f^{-1}(G) \subseteq X$ ανοικτό.
(iii) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό το $f^{-1}(F) \subseteq X$ κλειστό
(iv) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$

Απόδειξη
(i)$\Rightarrow$(ii) Έστω $x \in f^{-1}(G) \Longleftrightarrow f(x) \in G$. Το $G \subseteq Y$ ανοικτό
άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(f(x), \varepsilon) \subseteq G$.
Η f είναι συνεχής, άρα υπαρχει $\delta > 0$ ώστε:
$$f(S(x,\delta)) \subseteq S(f(x), \varepsilon) \subseteq G$$
Επομένως,
$$S(x,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$$
Άρα το $f^{-1}(G) \subseteq X$ ανοικτό.
(ii)$\Rightarrow$(iii)
Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε $Y \setminus F \subseteq Y$ ανοικτό και ανοικτό από (ii).
άρα $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό
Οπότε $f^{-1}(F) \subseteq X$ κλειστό.
(iii)$\Rightarrow$(iv)
Έστω $A \subseteq X$. Τότε $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Επειδή $\overline{f(A)} \subseteq Y$ κλειστό, απο την υπόθεση (iii) έχουμε ότι $f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq X$ κλειστό. Επομένως, αφού $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ και ισοδύναμα $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
(iv)$\Rightarrow$(i) Έστω $x_0 \in X$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $S(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}[S(f(x_0),\varepsilon)] = A$
Υποθέτουμε ότι για κάθε $\delta > 0$
$$S(x_0,\delta) \cap X \setminus A \neq \emptyset$$
Τότε $x_0 \in \overline{X \setminus A}$. Άρα $f(x_0) \in f(\overline{X \setminus A}) \subseteq \overline{f(X \setminus A)}$.
Επομένως $S(f(x_0),\varepsilon) \cap f(X \setminus A) \neq \emptyset$, δηλαδή
υπάρχει $\boxed{x \in X \setminus A}$ ώστε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, άτοπο!

Πρόταση Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ συνάρτηση, $x_0 \in X$.
Η f είναι **συνεχής** στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο X ώστε $x_n \to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη ($\Longrightarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$.
Αν $(x_n) \subseteq X$ και $x_n \to x_0$, τότε $f(x_n) \to f(x_0)$, διότι αν η $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$ υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ της (x_n) ώστε:

$$\sigma(f(x_{n_k}), f(x_0)) \geq \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$f(S_\rho(x_0, \delta)) \subseteq S_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Άρα ισχύει ότι $\rho(x_{n_k}, x_0) \geq \delta$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$
Άτοπο! διοτι $x_n \to x_0$.
Άρα, $f(x_n) \to f(x_0)$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι για κάθε $(x_n) \subseteq X$ ώστε $x_n \to x_0 \in X$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.
Τότε η f είναι συνεχής, διοτι αν η f δέν είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι:

$$f(S_\rho(x_0, \delta)) \nsubseteq S_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Επιλέγουμε $x_n \in S_\rho(x_0, \frac{1}{n})$ ώστε $f(x_n) \notin S_\sigma(f(x_0), \varepsilon)$
Τότε $x_n \to x_0$, ενώ $f(x_n) \not\to f(x_0)$.
Άτοπο!

Πόρισμα

Έστω $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και (X, d) ο χώρος γινόμενο (Παράδειγμα 9) όπου $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ και $d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$
Η προβολή $\pi_m : X \to X_n$ με $\pi_m((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_m$, $m \in \mathbb{N}$, είναι **συνεχής** συνάρτηση.

Απόδειξη

Έστω $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq X$, όπου $x_m = (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_m$ ώστε $x_m \to x$, όπου $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.
Σύμφωνα με το παράδειγμα 3.

$$x_n^m \xrightarrow[m]{} x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \pi_n(x_m) \longrightarrow \pi_n(x).$$

Απο την παραπάνω Πρόταση έχουμε π_n συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$