Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Έστω X ένας γραμμικός χώρος $(X,+,\cdot)$.
Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$.

(ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$.

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x \in X$.

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$,

ονομάζεται νόρμα στον X και το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ ονομάζεται χώρος με νόρμα.

Παρατήρηση

1. Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X, τότε ο περιορισμός $\|\cdot\|_Y : Y \to \mathbb{R}$, $\|y\|_Y = \|y\| \ \forall y \in Y$ της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στο Y είναι προφανώς μια νόρμα στον Y και ο $(Y, \|\cdot\|/_Y)$ είναι χώρος με νόρμα.
   Ο $(Y, \|\cdot\|/_Y)$ ονομάζεται υπόχωρος του $(X, \|\cdot\|)$.
2. Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι χώρος με νόρμα.

2

Πρόταση Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.
Από τήν νόρμα του χώρου X καθορίζεται μία **μετρική** $\rho : X \times X \to [0,+\infty]$ του χώρου X, θέτοντας $\rho(x,y) = \|x-y\| \;\; \forall \; x,y \in X$.

Απόδειξη

Η $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = \|x-y\| \;\; \forall \; x,y \in X$ είναι μετρική στο σύνολο X διότι:

(i) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$

(ii) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|-1(x-y)\| = \|y-x\| = \rho(y,x)$.

(iii) $\rho(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x = y$.

(iv) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

για κάθε $x,y,z \in X$.

Παρατήρηση

Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα είναι μετρικός χώρος, σύμφωνα με τα παραπάνω, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή κάθε μετρικός χώρος (X, ρ), όπου X είναι γραμμικός χώρος δεν είναι χώρος με νόρμα, δηλαδή δεν υπάρχει νόρμα στον X ώστε: $\rho(x,y) = \|x-y\| \;\; \forall \; x,y \in X$.

Για παράδειγμα:
Ο χώρος $\mathbb{R}$, των πραγματικών αριθμών, είναι διανυσματικός χώρος και είναι μετρικός χώρος με την μετρική $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου

$\rho(x,y) = 1$ αν $x,y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$ και

$\rho(x,y) = 0$ αν $x,y \in \mathbb{R}$ με $x = y$.

Ο χώρος $(\mathbb{R}, \rho)$ δεν είναι χώρος με νόρμα, διότι αν $\rho(x,y) = \|x-y\| \;\; \forall \; (x,y)$ για κάποια νόρμα $\| \; \|$ στον $\mathbb{R}$, τότε:

$1 = \rho(3,1) = \|3-1\| = \|2\|$, και

$1 = \rho(6,2) = \|6-2\| = \|4\| = \|2 \cdot 2\| = 2\|2\| = 2$. Άτοπο!

Γενικότερα, αν $\rho(x,y) = \|x-y\|$ για κάποια νόρμα του X, τότε $\rho(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x-y\| = |\lambda| \rho(x,y)$.
Η ισότητα $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$ δεν ισχύει προφανώς σε κάθε μετρικό χώρο, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση.

Η αλληνεπίδραση της αλγεβρικής έννοιας της γραμμικότητας και της αναλυτικής έννοιας της νόρμας σε ένα χώρο με νόρμα θα αποδειχθεί εξαιρετικά γόνιμη.

Θα αναφέρουμε αρχικά μερικές βασικές ιδιότητες ενός μετρικού χώρου που η μετρική του καθορίζεται από μια νόρμα.

<u>Πρόταση 1</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Η συνάρτηση της νόρμας $\|\cdot\| : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, (όπου $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = \|x-y\|$) είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x, y \in X$.

Τότε $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, από την ιδιότητα (iv) της νόρμας και γνωρίζοντας ότι $x-y \in X$, αφού X είναι διανυσματικός χώρος.

Άρα, $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \quad \forall\, x, y \in X$.

Επίσης, $\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\| \quad \forall x, y \in X$

Άρα,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \quad \forall\ x, y \in X.$$

Επομένως, ισχύει $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \quad \forall x, y \in X$

Άρα, η συνάρτηση της νόρμας $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι $\forall\, x \in X$ και $\forall\ \varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \varepsilon > 0$ ώστε:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| < \delta \implies \big|\|x\| - \|y\|\big| < \varepsilon.$$

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ και $x \in X$.

1. $x_n \to x \iff \rho(x_n, x) \to 0 \iff \|x_n - x\| \to 0$.
2. $x_n \to x \implies \|x_n\| \to \|x\|$ (λόγω της συνέχειας της νόρμας)

Το αντίστροφο δεν ισχύει:

Έστω $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ χώρος με νόρμα και $x_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $|x_n| = 1 \longrightarrow 1$ αλλά η $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ δεν συγκλίνει.

Πρόταση
Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με **νόρμα**, και $\rho : X \times X \to X$ η επαγόμενη μετρική, όπου $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Τότε:

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ $\forall\, x, y, z \in X$
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$ $\forall\, x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Κάθε κλειστή σφαίρα $B_M = \{x \in X : \|x\| \leq M\}$ για $M \in \mathbb{R}, M>0$ είναι **κλειστό σύνολο**, με μη κενό εσωτερικό και **κυρτό**.

Απόδειξη

1. $\rho(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = \rho(x,y)$.
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x-y)\| = |\lambda| \|x-y\| = |\lambda| \rho(x,y)$.
3. Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_M$ ώστε $x_n \to x$. Τότε $\|x_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\|x_n\| \to \|x\|$, από την προηγούμενη Πρόταση. Άρα, $\|x\| \leq M \Rightarrow x \in B_M$. Άρα, B_M είναι **κλειστό** σύνολο.
Η B_M έχει μη κενό εσωτερικό, διότι $S(0, \frac{M}{2}) \subseteq B_M$,
και είναι **κυρτό** σύνολο, διότι για κάθε $x, y \in B_M$ και $\lambda \in (0,1)$ έχουμε:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq$$
$$\leq \lambda M + (1-\lambda) M = M.$$

Άρα, $\lambda x + (1-\lambda) y \in B_M$ $\forall\, 0<\lambda<1$.

Πρόταση Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$.

1. Κάθε **ανοικτή σφαίρα** $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ είναι **ανοικτό** σύνολο και **φραγμένο**.
2. Κάθε **κλειστή σφαίρα** $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο, φραγμένο με μη κενό εσωτερικό.
(ένα σύνολο $A \subseteq X$ φραγμένο $\Leftrightarrow$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\|x\| \leq M$ $\forall x \in A$.)

Απόδειξη

1. Έστω $x \in S(x_0, \varepsilon)$. Άρα, $\|x - x_0\| < \varepsilon$.
Έστω $\delta = \min\{\|x - x_0\|, \varepsilon - \|x - x_0\|\} > 0$
Αν $y \in S(x, \delta)$, τότε $\|x - y\| < \delta$.
Άρα, $\forall y \in S(x, \delta)$, έχουμε: $\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\|$ και
άρα $\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < \delta + \|x - x_0\| \leq \varepsilon$, Επομένως
$S(x, \delta) \subseteq S(x_0, \varepsilon)$. Άρα, $S(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο,
και προφανώς φραγμένο, διότι:
$\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < \varepsilon + \|x_0\|$ $\forall\, x \in S(x_0, \varepsilon)$.

2. Πράγματι, έστω $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Τότε $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$.
Άρα, $\|x\| = \|(x - x_0) + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq \varepsilon + \|x_0\|$ $\forall x \in B(x_0, \varepsilon)$
Άρα, το σύνολο $B(x_0, \varepsilon)$ είναι **φραγμένο**.
Αφού $\emptyset \neq S(x_0, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$ και $S(x_0, \varepsilon)$ ανοικτό σύνολο, το $B(x_0, \varepsilon)$ έχει μη κενό εσωτερικό.

<u>Πρόταση</u> Σε κάθε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ οι πράξεις $+ : X \times X \to X$ με $(x,y) \to x+y$ και $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ με $(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$ είναι συνεχείς.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \times X$ και $(x,y) \in X \times X$ ώστε: $(x_n, y_n) \to (x,y)$ ως προς την μετρική γινόμενο ρ_∞ του $X \times X$ $\left(\rho_\infty((x_n, y_n), (x,y)) = \max(\|x_n - x\|, \|y_n - y\|) \to 0\right.$.

Άρα, $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ και

$y_n \to y \Leftrightarrow \|y_n - y\| \to 0$

Από την ιδιότητα της νόρμας:

$$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow[n]{} 0$$

Επομένως $x_n + y_n \to x + y$.

Άρα, η συνάρτηση $+ : X \times X \to X$ συνεχής

Έστω $(\lambda_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \times X$ και $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ ώστε:

$(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x)$ ως προς την μετρική ρ_∞

Τότε $\lambda_n \xrightarrow[n]{} \lambda$ και $x_n \xrightarrow[n]{} x$, άρα

$|\lambda_n - \lambda| \to 0$ και $\|x_n - x\| \to 0$.

Από την ιδιότητα της νόρμας:

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| =$$
$$= |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \xrightarrow[n]{} 0$$

Άρα, $\lambda_n x_n \to \lambda x$

Επομένως η συνάρτηση $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ όπου $(\lambda, x) \to \lambda x$ είναι συνεχής.

Πρόταση

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X.

Τότε η κλειστότητα $\overline{Y} = \{x \in X : \text{υπάρχει } (y_n) \subseteq Y \text{ ώστε } y_n \to x\}$, ως προς την επαγώμενη μετρική ($\rho(x,y) = \|x-y\|$ $\forall\, x,y \in X$) του X είναι **γραμμικός υπόχωρος** του X και άρα **χώρος** με νόρμα τον περιορισμό $\|\cdot\|_{\overline{Y}}$ της νόρμας $\|\ \|$ στον $\overline{Y}$.

Απόδειξη

Έστω $Y \subseteq X$ γραμμικός υπόχωρος του X.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lambda x + \mu y \in \overline{Y}$ για κάθε $x, y \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Έστω $x, y \in \overline{Y}$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(x_n) \subseteq Y$, $(y_n) \subseteq Y$ ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Άρα, $\lambda x_n + \mu y_n \longrightarrow \lambda x + \mu y$. Επίσης $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$, αφού Y είναι γραμμικός χώρος.
Επομένως $\lambda x + \mu y \in \overline{Y}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \overline{Y}$ και άρα $\overline{Y}$ είναι **γραμμικός χώρος**, υπόχωρος του X.
Ο περιορισμός της συνάρτησης της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στον γραμμικό χώρο $\overline{Y}$, $\|\cdot\|_{\overline{Y}} : \overline{Y} \to \mathbb{R}$ όπου $\|y\|_{\overline{Y}} = \|y\|$ $\forall\, y \in \overline{Y}$, είναι **προφανώς** νόρμα **στον** $\overline{Y}$ και ο χώρος $(\overline{Y}, \|\ \|_{\overline{Y}})$ είναι χώρος με νόρμα.

Παρατήρηση

Αν X, Y είναι **γραμμικοί** χώροι, οπότε ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού με τις καλές ιδιότητες που αναφέραμε. Οι **κατάλληλες συναρτήσεις** που διατηρούν αυτές τις πράξεις είναι συναρτήσεις $T: X \to Y$ ώστε:

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall\, x, y \in X$$

και

$$T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ x \in X.$$

και ονομάζονται **γραμμικοί** τελεστές

Ορισμός

Έστω X, Y γραμμικοί χώροι με νόρμα.
Ένας **γραμμικός** τελεστής $T: X \to Y$ λέγεται **φραγμένος** αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ ώστε:

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall\, x \in X$$

Ισοδύναμα:
Ο $T: X \to Y$ είναι **φραγμένος** αν και μόνο αν η εικόνα $T(S_X)$ της μοναδιαίας κλειστής σφαίρας $S_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ του X είναι **φραγμένο** υποσύνολο του Y.
Αν ο T είναι **φραγμένος** τελεστής θέτουμε:

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall\, x \in X\} \geq 0$$

Τότε $\|T\|$ είναι η **νόρμα** του τελεστή T.
Ο ορισμός της νόρμας $\|T\|$ του τελεστη T είναι **καλός**, διότι το σύνολο:

$$C_T = \{M > 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \ \forall\, x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$$

είναι μη **κενό**, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για κάθε φραγμένο τελεστη T και προφανώς **κάτω** φραγμένο από το 0.
Αρα, υπάρχει το $\inf C_T \in \mathbb{R}$
Το σύνολο C_T είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (άσκηση) άρα $\inf C_T \in C_T$.

Δηλαδή,

$$\|T\| = \min\{M > 0 : T(x) \leq M\|x\| \ \forall\, x \in X\}.$$

Επομένως, $\boxed{\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in X}$
αν $T: X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.