1º Μάθημα

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό σύνολο λέγεται γραμμικός (ή διανυσματικός χώρος) στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

την πρόσθεση $+ : X \times X \to X \quad (x,y) \to x+y$

και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X \qquad (\lambda, x) \to \lambda \cdot x,$

που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $(X,+)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση:

(1) $x+y = y+x \quad \forall\, x,y \in X$

(2) $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall\, x,y,z \in X$

(3) Υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\vec{0} \in X$ ώστε $\vec{0}+x = x \quad \forall\, x \in X.$

(4) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in X$ ώστε $x+(-x) = \vec{0}$

(β) Αξιώματα πολλαπλασιασμού

(1) $\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\cdot\mu)\cdot x \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ x \in X.$

(2) $\lambda\cdot(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in X.$

(3) $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda x + \mu x \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ x \in X.$

(4) $1\cdot x = x \quad \forall\, x \in X.$

Άμεσες συνέπειες από τον ορισμό είναι:

$0\cdot x = \vec{0}, \quad \lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad -x = (-1)x \quad \forall x \in X$

$\forall x \in X$ ($0x + x = 0x + 1x = (0+1)x = 1x = x$, άρα $0\cdot x = 0$).

($x + (-1)x = 1\cdot x + (-1)x = (1+(-1))x = 0x = \vec{0}$, άρα $(-1)x = -x$)

($1\vec{0} = \vec{0}$, $2\vec{0} = \vec{0}+\vec{0} = 0$, επαγωγικά $\lambda\vec{0} = \vec{0}$).

Παραδείγματα γραμμικών χώρων

1. Ο $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cdot\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός (γραμμικός) χώρος.

2. Ο $\mathbb{R}^m$ για $m \in \mathbb{N}$ είναι διανυσματικός χώρος με τις πράξεις:

$$(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1+y_1, \dots, x_m+y_m)$$

και
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m) \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$(\vec{0} = (0, \dots, 0)).$$

3. $F(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ συνάρτηση} \}$.

Ορίζουμε για $f, g \in F(X)$ $f+g : X \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in X$. Τότε $f+g \in F(X)$

Ορίζουμε για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in F(X)$
$\lambda f : X \to \mathbb{R}$ με $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $\forall x \in X$. Τότε $\lambda f \in F(X)$

Ο $(F(X), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος, όπου $\vec{0} = f_0$ με $f_0(x) = 0 \ \forall x \in X$.

Πρόταση

Έστω $(X, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Ο $(Y, +, \cdot)$ είναι <u>διανυσματικός χώρος</u> με τους περιορισμούς των πράξεων $+, \cdot$ στο $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα, αν:

$x + y \in Y \ \forall x, y \in Y$ και
$\lambda x \in Y \ \forall x \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

ή ισοδύναμα αν $\boxed{\lambda x + \mu y \in Y}$ $\forall x, y \in Y$ και $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (άσκηση).

Ο $(Y, +, \cdot)$ λέγεται (διανυσματικός) <u>υπόχωρος</u> του X.

4. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών
$$S = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
είναι διανυσματικός χώρος με τις πράξεις:
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{και}$$
$$\lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
(Προφανώς ισχύουν οι ιδιότητες:
(α)(1), (α)(2) προφανώς. Θέτοντας $\vec{0} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $y_n \equiv 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$
έχουμε την α(3) και θέτοντας $-(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε την α(4).
~~Προφανώς ισχύουν~~ οι ιδιότητες: β(1),(2),(3) και (4).

5 Ο χώρος $\ell^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\} \subseteq S$
είναι διανυσματικός χώρος, διότι $\ell^\infty \subseteq S$
και $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

6. Ο χώρος $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} : x_n \to x \text{ για } x\in\mathbb{R}\}$
είναι διανυσματικός χώρος, διότι $c \subseteq \ell^\infty$
και $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \lambda x + \mu y$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$
για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$

7 Ο χώρος $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} : x_n \to 0\} \subseteq \ell^\infty$
είναι διανυσματικός χώρος, διότι
$\lambda(x_n) + \mu(y_n) \longrightarrow 0 \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$
και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Άρα, $\lambda(x_n) + \mu(y_n) \in c_0$

8 Ο χώρος ℓ_p για $1 \le p < \infty$, όπου
$$\ell^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \subseteq c_0$$
είναι διανυσματικός χώρος, διότι σύμφωνα ανισότητα Minkowski, που αποδεικνύεται στη συνέχεια, και παίρνοντας όριο ως προς κ έχουμε για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, ότι:
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n + \mu y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\mu| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$
Άρα, $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$
Επομένως ο ℓ^p, $1 \le p < \infty$ είναι διανυσματικός χώρος.

Ανισότητα Holder

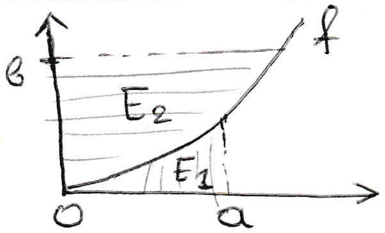
Αρχικά θα αναφέρουμε την ανισότητα Young

Ανισότητα Young

Αν $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, με $f(0)=0$, συνεχής και επί, τότε για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha \neq \beta$ ισχύει:

$$\alpha \cdot \beta \leq \int_0^{\alpha} f(t)\,dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)\,dt.$$

Απόδειξη



$$E_1 + E_2 \geq a \cdot b$$

Ανισότητα Holder

Αν $1<p<+\infty$, και $1<q<+\infty$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow p \cdot q = p+q$, τότε για $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $k \in \mathbb{N}$. ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Απόδειξη Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ $f(x) = x^{p-1}$.

Τότε $f^{-1} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ με $f^{-1}(y) = y^{q-1}$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow p+q = p \cdot q \Longleftrightarrow (p-1)\cdot(q-1) = 1$

(διότι $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x^{(p-1)(q-1)} = x \quad \forall x \in [0,+\infty)$)

Επίσης έχουμε $f(0)=0$, f συνεχή και f^{-1} συνεχή.

Από την ανισότητα Young έχουμε:

$$\alpha \cdot \beta \leq \int_0^{\alpha} x^{p-1}\,dx + \int_0^{\beta} x^{q-1}\,dx, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Άρα,

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{αν } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \alpha, \beta \geq 0$$

Εφαρμόζοντος την παραπάνω ανισότητα:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |y_i| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q \quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R},\ y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$$

Άρα, $\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \leq 1$ αν $\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1$

Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R},\ y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$$

Ανισότητα Minkowski

Έστω $1 \leq p < \infty$ και $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Απόδειξη

Για $p=1$, η ανισότητα είναι προφανής.

Έστω $1<p<+\infty$. Τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^{p-1} \cdot |x_i+y_i| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^{p-1} \cdot (|x_i|+|y_i|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}} \underbrace{|x_i|} + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}} \cdot \underbrace{|y_i|} \leq$$

Αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(Ανισότητα Holder)

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

Έχουμε

$$\left(\begin{array}{l} (p-1)\cdot q = p \Leftrightarrow \\ p\cdot q - q = p \Leftrightarrow \\ p\cdot q = p+q \Leftrightarrow \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Άρα, τελικά

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

και άρα

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ειδική περίπτωση $p=2$, $q=2$ Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$