

Ασκήσεις Γ

1. (*H* τόσο απλή αυτή Άσκηση/Λήμμα, θα σας είναι χρήσιμη σε πάρα πολλά σημεία της μελέτης σας.
Έστω A, B, C υποομάδες μια ομάδας G με $B \leq A$. Δείξτε ότι $A \cap (BC) = B(A \cap C)$.
(Προσοχή! Τα $A \cap (BC)$ και $B(A \cap C)$ ενδέχεται να μην είναι υποομάδες της G)
2. Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι το ευθύ γινόμενο των υποομάδων της H και K ($G = H \times K$). Αν $H \leq L \leq G$. Δείξτε ότι $L = H \times (L \cap K)$. Επιπλέον δείξτε ότι $L \triangleleft G$ αν και μόνο αν $L \cap K \triangleleft K$.
3. Αν οι H, K είναι κανονικές υποομάδες της ομάδας G με $G = HK$. Δείξτε ότι $G/(H \cap K) = H/(H \cap K) \times K/(H \cap K) \simeq G/H \times G/K$.
4. Έστω L, K κανονικές υποομάδες της ομάδας G με $K \leq L$. Δείξτε ότι:
Αν η G διασπάται επί της L , τότε η G/K διασπάται επί της L/K .
Αν η G διασπάται επί της K και H είναι ένα συμπλήρωμά της, τότε η G διασπάται επί της L αν και μόνο η H διασπάται επί της $H \cap L$.
5. Έστω L, K κανονικές υποομάδες της ομάδας G με $K \cap L = 1$. Δείξτε ότι:
Αν η G/L διασπάται επί της KL/L , τότε η G διασπάται επί της K .
6. Έστω K κανονική υποομάδα της ομάδας G με $Z(K) = 1$. Δείξτε ότι:
 $H \leq G$ διασπάται επί της K αν και μόνο αν η $\text{Aut}(K)$ διασπάται επί της $\text{Inn}(K)$.
7. Έστω $K \triangleleft G$ (G πεπερασμένη). Υποθέτουμε ότι η G/K είναι p -ομάδα και P μια p -Sylow υποομάδα της G . Δείξτε ότι η G διασπάται επί της K αν και μόνο αν η P διασπάται επί της $P \cap K$.
8. Έστω G ομάδα και H υποομάδα της G . Δείξτε ότι η H αποτελεί συμπλήρωμα ως προς μια κανονική υποομάδα K της G ($G = K \rtimes H$), αν και μόνο αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\vartheta : G \rightarrow H$, ώστε ο περιορισμός του επί της H να είναι η ταυτοτική απεικόνιση, αν και μόνο αν, για κάθε ομάδα M και κάθε ομομορφισμό ομάδων $\varphi : H \rightarrow M$, ο φ επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό ομάδων $\bar{\varphi} : G \rightarrow M$.
Έστω $K \triangleleft G$ και φ ο φυσικός επιμορφισμός από την G στην G/K . Δείξτε ότι η G διασπάται επί της K (με ένα συμπλήρωμα, έστω H) αν και μόνο αν υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων $\vartheta : G/K \rightarrow G$. Έτσι ώστε η σύνθεση $\varphi \circ \vartheta$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση της G/K .
*Σε όλες τις προηγούμενες, ισοδύναμες, περιπτώσεις η υποομάδα H της G ονομάζεται **retract**, **ανάκληση/αναίρεση** (έχετε να προτείνετε κάτι πιο δόκιμο;)*
9. Δείξτε ότι η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ των ρητών αριθμών δεν έχει υποομάδα H , ώστε το πηλίκο \mathbb{Q}/H να είναι άπειρη κυκλική.
10. Μια ομάδα K θα ονομάζεται **πλήρης** αν $Z(K) = 1$ και $\text{Aut}(K) = \text{Inn}(K)$.
Έστω $K \triangleleft G$ και K πλήρης. Δείξτε ότι $G = C_G(K) \times K$.
Δείξτε ότι η S_3 είναι πλήρης.
Έστω p περιττός πρώτος. Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_{2p} είναι πλήρης αν και μόνο αν $p = 3$.
Δια περετέρω μελέτην: Δείξτε ότι S_n για $n \geq 3$, $n \neq 6$ είναι πλήρης, ενώ η S_6 δεν είναι πλήρης.

-
11. Έστω p, q πρώτοι με $p > q$. Αν $p \not\equiv 1 \pmod{q}$. Δείξτε ότι όλες οι ομάδες τάξης pq είναι ισόμορφες. Αν $p \equiv 1 \pmod{q}$, τότε υπάρχουν μόνο δύο μη ισόμορφες ομάδες τάξης pq .
12. Δείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις μη ισόμορφες ομάδες τάξης 30.
Να τις προσδιορίσετε.
13. Δείξτε ότι υπάρχουν πέντε μη ισόμορφες ομάδες τάξης 12.
Να τις προσδιορίσετε.
14. Έστω G μια ομάδα με τάξη ίση με 77.
i) Δείξτε ότι η ομάδα αυτομορφισμών της $Aut(G)$ είναι αβελιανή, αλλά όχι κυκλική.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε τα Θεωρήματα Sylow, τόσο για την ομάδα G , όσο και για την ομάδα $Aut(G)$.
ii) Δείξτε ότι υπάρχουν δύο κυκλικές υποομάδες της $Aut(G)$ δείκτου 2.
15. Έστω K μια ομάδα και $\varrho : K \rightarrow S_K$ η (γνωστή) αναπαράσταση της K . Έστω $K^* = Im \varrho$. Δείξτε ότι $Aut(K) \cap K^* = 1$ και $N_{S_K}(K^*) = Aut(K)K^*$