$f: V \to W$ δ.χ.
γραμμική
$\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{cases}$

- Αν f 1-1 και $v_1, \dots, v_n \in V$ γ.α., τότε και τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ είναι γ.α. του W
- Αν f επί και $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ παράγουν τον V, τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ παράγουν τον W

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν $w \in W$, τότε αφού f επί, $\exists v \in V$ με $f(v) = w$
$v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, άρα $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \longrightarrow w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) =$

$w \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle \Leftarrow \Big\{ \quad = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$

$f, g \quad V \to W$

$f = g \Leftrightarrow f(v) = g(v) \quad \forall v \in V$

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] $f = g$
2] $f|_K = g|_K$, K: οποιοδήποτε σύνολο γεννητόρων του V
3] $f|_K = g|_K$, για κάποιο σύνολο γεννητόρων K

- 1] ⇒ 2]: Δύο συναρτήσεις ίσες, είναι ίσες αν περιοριστούν σε οποιοδήποτε υποσύνολο του V
- 2] ⇒ 3]: Προφανές
- 3] ⇒ 1]: πρέπει νδο $f = g$ δηλαδή $\forall v \in V \Rightarrow f(v) = g(v)$.

Έστω $\langle K \rangle = V \Rightarrow v = \sum_{k \in K} \lambda_k k \Rightarrow \boxed{f(v)} = \sum_{k \in K} \lambda_k f(k) = \sum_{k \in K} \lambda_k g(k) = \boxed{g(v)}$

Τώρα θα ρωτήσω το ανάποδο:

$f: V \to W$, $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Ερώτημα: Υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f: V \to W$ με $f(v_1) = w_1, \ \dots, \ f(v_n) = w_n$ για δεδομένα στοιχεία $w_1, \dots, w_n$

ΟΧΙ : Σελ. 2

Scanned with CamScanner

ΟΧΙ, γιατί, αν τα $v_1,\dots,v_n$ είναι γ. εξαρτημένα 5.4.2023

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, τότε και τα $f(v_1),\dots,f(v_n)$ είναι γ. εξαρτημένα.

Για να υπάρχει μια τέτοια γραμμική συνάρτηση θα πρέπει τα $w_1,\dots,w_n$ να ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις γραμμικής εξάρτησης.

↳ Παράδειγμα: v_1, v_2, v_3, $v_3 = v_1 + v_2$

Αυτό σημαίνει ότι το $f(v_3) = \underset{w_1}{f(v_1)} + \underset{w_2}{f(v_2)}$

$w_3 \neq$ ↳ αν είναι διαφορετικό, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Νέο Ερώτημα:

Αν τα $v_1,\dots,v_n$ γ.α.

$w_1,\dots,w_n$ οποιαδήποτε στοιχεία του W

Τότε υπάρχει γραμμική συνάρτηση $f: V \to W$:
$f(v_1) = w_1$
$f(v_2) = w_2$
$\vdots$
$f(v_n) = w_n$

V πεπερασμένα παραγόμενος

$\{v_1,\dots,v_n, v_{n+1},\dots,v_m\}$, $m = \dim V \geq n$

↳ βάση του V

$\forall v \in V$

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i v_i$ $\boxed{\text{Θέτω } F(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \;\Big|\; = \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i w_i}$?

Διαλέγω στοιχεία $w_{n-1},\dots,w_n$ στο W

↳ $F(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$

καλά ορισμένη: $\forall v \in V$: $v =$ γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδιασμός των $v_1,\dots,v_n$.

και γραμμική:

$$\left.\begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \\ v' = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' v_i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} F(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (w_i) \\ F(v') = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' (w_i) \end{array}\right\} \Rightarrow F(v+v') = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_i') w_i$$

$v + v' = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_i') v_i$

Άρα $F(v) + F(v') = F(v+v')$

και

$F(\lambda v) = \lambda F(v)$

$\Longrightarrow$

5.4.2023

Άρα, αν $v_1, \dots, v_n$ είναι βάση, τότε η γραμμική $F \rightsquigarrow$
$$\begin{array}{l} v_1 \to w_1 \\ v_2 \to w_2 \\ \vdots \\ v_n \to w_n \end{array}$$
είναι μοναδική και $\sum \lambda_i v_i \to \sum \lambda_i w_i$

↳ Γνωρίζω μια γραμμική συνάρτηση αν την γνωρίζω στη βάση!

$v_1, \dots, v_n$ διατεταγμένη βάση του V

$w_1, \dots, w_m$ βάση του W

$$F(v_1) = \boxed{a_{11}} w_1 + \boxed{a_{21}} w_2 + \dots + \boxed{a_{m1}} w_m$$
$$F(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$
$$\vdots$$
$$F(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

↳ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Πήρα τις γραμμές πάνω και τις έκανα στήλες

$$v \in V, \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \to \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{συντεταγμένες}} \Rightarrow F(v) \to \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}}_{\text{συντεταγμένες}} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$f: V \to W$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] f 1-1 γραμμική

2] $\exists g$ γραμμική $W \to V$ ώστε $g \circ f = 1_V$

↳ ΑΠΟΔΕΙΞΗ, ΣΕΛ. 4

5.4.2023

• **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**: Έστω f 1-1, έστω $v_1, \dots, v_n$ μια βάση του V.
Τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\hookrightarrow (f \text{ 1-1})$

Υπάρχει $g: W \to V$, ώστε $g(f(v_i)) = v_i$

$g \circ f \Rightarrow (g \circ f)(v_i) = v_i$ για τα στοιχεία της βάσης

$\Rightarrow (g \circ f) = 1_V$ (τα $v_1, \dots, v_n$ παράγουν το V ως βάση)

1] ⇒ 2]

• **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** 2] ⇒ 1]: $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow g(f(v_1)) = g(f(v_2)) \Rightarrow v_1 = v_2$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} &(g \circ f)(v_1) = (g \circ f)(v_2) \\ &(\Rightarrow (1_V)(v_1) = (1_V)(v_2)) \end{aligned}\right\} f_{1-1}$$

Έστω $f: V \to W$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1] Η f είναι επί
2] $\exists\, g: W \to V$ γραμμική η οποία: $f \circ g = 1_W$

• **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**: 1] ⇒ 2] Έστω $w_1, \dots, w_m$ μια βάση στο W.
Υπάρχουν $v_1, \dots, v_n$ στοιχεία του V με $f(v_i) = w_i$ (επί).
Υπάρχει g ώστε $g(w_i) = v_i$ γιατί $w_1, \dots, w_m$ γ.α.
$(f \circ g)(w_i) = f(g(w_i)) = f(v_i) = w_i$, άρα $(f \circ g)(w_i) = (1_W) w_i$, άρα

$f \circ g = 1_W$

(ταυτίζονται στο σύνολο που παράγει τον χώρο).

• **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**:
2] ⇒ 1] $w \in W$:

$w = 1_W \cdot w = f(\underbrace{g(w)}_{\in V})$

Αν η f είναι 1-1 και επί, τότε $\exists g$ ώστε

$f \circ g = 1_W$
και
$g \circ f = 1_V$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

5.4.2023

$f\circ g = 1_W$, $g'\circ f = 1_V$ $\Big\}$ $\xrightarrow{\text{εφαρμόζω}}$ την g': $g'(f\circ g)=g'$

$\|$

$(g'\circ f)\circ g = g'$

$\underbrace{1_V}\circ g = g' \Rightarrow g = g'$

~ Αυτό προκύπτει και από την κατασκευή τους

~ παράδειγμα ισομορφισμοί

¡Αγαπημένη he said!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1] Θεωρούμε τον χώρο των nxn πινάκων και την συνάρτηση

ίχνος ← $tr(A) \longrightarrow tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$A=(a_{ij})$

Δείξτε ότι το $tr(A)$ είναι γραμμική συνάρτηση

ΛΥΣΗ

• Ο χώρος των nxn πινάκων είναι διάστασης n^2

(Μια βάση του είναι οι πίνακες E_{ij} που έχουν $\begin{cases} 1, & \text{στην } ij \text{ θέση} \\ 0, & \text{στις άλλες} \end{cases}$)

Αυτή είναι μια συνάρτηση: $\mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

→ Για να δείξω ότι είναι γραμμική:

A, B nxn πίνακες

$A=(a_{ij})$ | $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

$B=(b_{ij})$ | $\lambda A=(\lambda a_{ij})$

• $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

• $tr(B)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$

$tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = tr(A)+tr(B)$

$tr(\lambda A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_{ii} = \lambda tr(A)$

✓ Γραμ. Συνάρτ.

● Είναι 1-1; όχι με $\boxed{n>1 \text{ όχι}}$ διαστάσεις αφού $n^2<1$ εκτός όταν $m=1$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{1-1} & W \\ \downarrow \text{dim} & & \downarrow \text{dim} \\ n & & m \end{array}$$

$n\leq m$

$\boxed{n=1}$ $\boxed{\text{ναι}}$

$\boxed{n>1}$ διαφορετικά, $E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$, $tr(E_{12})=0$

$\boxed{\text{όχι}}$

● Είναι επί; $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

$a\in\mathbb{R} \Rightarrow tr(aE_{11})=a$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$

Συνέχεια σελ. 6

5.4.23

Μπορούμε να βρούμε: (αφού είναι επί)

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ έτσι ώστε: $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$

Μια τέτοια: $g : 1 \to E_{1,1}$

$$g(a) \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{tr} a$$

(Μπορούμε να βρούμε πολλές για $n>2$:

- $g : 1 \to E_{22}$
- $g : 1 \to \frac{E_{11} + E_{22}}{2}$
- $g : 1 \to \frac{E_{11} + E_{22}}{2} + E_{12}$

↳ το οποίο αν πάρω σύνθεση με την f μηδενίζεται.)

$\Rightarrow$ Η g δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη!

2] Το $\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$ δ.χ. διάστασης 2.

Μια βάση του $\mathbb{C}$ είναι $\{1, i\}$, $i^2 = -1$

↳ $\mathbb{C} \ni z = a + i b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\langle 1, i \rangle = \mathbb{C}$

$a + ib = 0 \iff \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix} \Rightarrow 1, i$ γ.α.

⇝ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ → ο εξωτερικός πολ/μος είναι στο $\mathbb{R}$

⇝ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ → ο —״— είναι στο $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to \bar{z}$

είναι $\mathbb{R}$-γραμμική

- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ και

$\boxed{\begin{matrix} z = a + ib \\ \bar{z} = a - ib \end{matrix} \to \text{"συζυγές"}}$

- $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda a + i\lambda b} =$

$\lambda a - i\lambda b = \lambda(a - ib) = \lambda \bar{z}$

Δεν είναι $\mathbb{C}$-γραμμική

$\overline{z 1_{\mathbb{C}}} = \bar{z}\, \overline{1_{\mathbb{C}}} = \bar{z}\, \bar{1}$

αν ήταν $\mathbb{C}$-γραμμική θα είναι $z \bar{1}$.