Διάλεξη 19 — 3.4.2023

[Κεφάλαιο 5 του Βιβλίου: Γραμμικές Απεικονίσεις]

V δ.χ. $\quad W$ δ.χ. $\quad f: V \to W$

Η f θα λέγεται γραμμική αν:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad \text{και} \\ \bullet\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{array}\right\} \forall\, v_1, v_2, v \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

↓ πράξεις στο V $\qquad$ ↓ πράξεις στο W

$$\begin{array}{ccc} V \ni v_1, v_2 & \longrightarrow & f(v_1), f(v_2) \in W \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & f(v_1)+f(v_2) : \text{πράξη στο } W \\ v_1+v_2 & \longrightarrow & f(v_1+v_2) \in W \end{array}$$

πχ)

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \cos(x) \end{array}$ } **Δεν** είναι γραμμική, εν γένει $\cos(x+y) \neq \cos(x)+\cos(y)$

- $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$ → γραμμική:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} \longrightarrow \underbrace{\underset{m\times n}{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}}_{m\times 1}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \checkmark$$

- $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$: παραγωγίσιμες άπειρες φορές συναρτήσεις από το $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rl} D: F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \\ f \to f' & \end{array}$$

↓ γραμμική

1] $(f_1+f_2)' = f_1'+f_2'$

2] $(\lambda f_1)' = \lambda f_1'$

- $\Phi: f \longmapsto f+2f'+3f''$ γραμμική

- $C[0,1]$ να είναι οι συνεχείς συναρτήσεις $[0,1] \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}: C[0,1] \to \mathbb{R} \\ \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g) \\ \mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}(f) \end{array} \right.$$

3.4.23

Αν η f είναι 1-1 τότε η f θα λέγεται μονομορφισμός
Αν η f είναι επί τότε η f θα λέγεται επιμορφισμός
Αν η f είναι 1-1 και επί τότε θα λέγεται ισομορφισμός

f γραμμική $f: V \to W$, ορίζονται:

$\boxed{\mathrm{Ker} f}$ υπόχωρος του V (πυρήνας): $\mathrm{Ker} f = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \subset V$

$\boxed{\mathrm{Im} f}$ υπόχωρος του W (εικόνα): $\mathrm{Im} f = \{ w \in W : w = f(v) \text{ για } v \in V \} \subset W$

πχ) $\mathbb{R}_{\leq n}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq (n-1)}[x]$

$f(x) \longmapsto f'(x)$: γραμμική

- $\mathrm{ker} f = c \in \mathbb{R}$ τα σταθερά πολυώνυμα

$\mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x]$

$f \longmapsto f - f'$

- $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

Δεν υπάρχει πολυώνυμο ίσο με την παράγωγό του.

όμως

$F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f \xrightarrow{\varphi} f - f'$

$\mathrm{Ker}\varphi = \langle e^x \rangle$

Αν v και $v' \in \mathrm{Ker} f$ πρέπει νδο ($\mathrm{Ker} f \subset V$)

$v + v' \in \mathrm{Ker} f$:

$f(v+v') = f(v) + f(v') = 0_W + 0_W =$, όπου $f(v) = f(v') = 0_W$

(f γραμμική)

$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0_W = 0_W \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Ker}\varphi$

$\mathrm{Im} f$ είναι υπόχωρος του W, πράγματι:

- $\left.\begin{array}{l} w_1 \in \mathrm{Im} f \Rightarrow w_1 = f(v_1),\ v_1 \in V \\ w_2 \in \mathrm{Im} f \Rightarrow w_2 = f(v_2),\ v_2 \in V \end{array}\right\}$ $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V})$

- $\lambda w \in \mathrm{Im} f$

$\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v)$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ (SOS)

$\left.\begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad x \longmapsto xA \end{array}\right\}$ $\mathrm{Im}\varphi$ είναι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του A.

3.4.2023

f 1-1 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$
f επί $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} f = W$ (προφανές)

f γραμμική : $f(0_V) = 0_W$

$$\underline{f(x)} = f(0_V + x) = f(0_V) + \underline{f(x)} \Rightarrow \underline{f(0_V) = 0_W}$$

• Αν $\mathrm{Ker} f \neq \{0\} \Rightarrow f$ όχι 1-1 | Αν f 1-1 $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

$\Downarrow$

$\exists\, v \neq 0$: $f(v) = 0$, όμως και $f(0) = 0$ άρα όχι 1-1 : $v \neq 0$, $v \to 0$, $0 \to 0$

• Έστω ότι $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. θ.δ.ο. f 1-1 :

Έστω v_1, v_2 με $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \overset{\text{γραμμικότητα}}{\Rightarrow} f(v_1 - v_2) = 0$

$\overset{\mathrm{Ker} f = \{0\}}{\Longrightarrow} v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = v_2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$$

ΤΟ παράδειγμα της γραμμικής συνάρτησης!

$\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$ αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμ. εξαρτημένες :

Έστω $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$.

$$\underset{n\times m}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ο πυρήνας αποτελείται από όλους τους συντελεστές που κάνουν τις στήλες γραμμικά εξαρτημένες.

$v_1, \dots, v_n \in V$ 3.4.2023

αν τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γ.ε. στον V, τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ είναι γ.ε. στον W. !

↳ Αν $v_1, \dots, v_n$ γ.ε. στον $V \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, λ_i όχι όλα 0

εφαρμόζω την f

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = f(0) = 0$$

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$$

Αν $v_1, \dots, v_n$ είναι γ.α. του V, τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ μπορεί να είναι γ.α. ή γ.ε. !

πχ) $V \xrightarrow{Id} V$

$v \longmapsto v$

$v_1, \dots, v_n$ γ.α. ↳ $v_1, \dots, v_n$. γ.α.

πχ) $V \xrightarrow{0} V$

$v_1, \dots, v_n \longmapsto 0$

γ.α. γ.ε.

- $0(v_1 + v_2) = 0 = 0(v_1) + 0(v_2)$
- $0(\lambda v_1) = \lambda 0(v_1)$, $0(\lambda v_1) = 0$, $0(v_1) = 0$

↳ Η μηδενική συνάρτηση έχει πυρήνα όλο τον διανυσματικό χώρο!

- f 1-1 και $v_1, \dots, v_n$ γ.α., τότε τα $f(v_1), \dots, f(v_n)$ γ.α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0 \Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \Rightarrow$

$\underset{f\ 1\text{-}1}{\Rightarrow}$ $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$

γ.α.

ή

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

γιατί $\in \operatorname{Ker} f = \{0\}$

3.4.2023

$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ δ. χώρος} \\ B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ βάση του } V \end{array} \right\}$.

Ορίζω $\boxed{[\cdot]_B} : V \longmapsto \mathbb{R}^n$

$$v \longmapsto [\cdot]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \quad \leftarrow \text{ μοναδική γραφή αφού } v_1, \dots, v_n \text{ είναι βάση}$$

→ Η $[\cdot]_B$ είναι γραμμική:

$$\left.\begin{array}{l} v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \\ v' = \sum_{i=1}^{n} x_i' v_i \end{array}\right\} \Rightarrow v + v' = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_i') v_i \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{pmatrix}$$

και όμοια:

$$\lambda v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Άρα:
- $[v + v']_B = [v]_B + [v']_B$
- $[\lambda v]_B = \lambda [v]_B$

→ Η $[\cdot]_B$ είναι επί, πράγματι:

η τυχαία n-άδα $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right]_B$

→ Η $[\cdot]_B$ είναι 1-1, πράγματι: η γραφή κάθε στοιχείου του V ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης είναι μοναδική.

Άρα αν $\left[\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} y_i v_i \right]_B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$V \xrightarrow{[\cdot]_B} \mathbb{R}^n$$

είναι ισόμορφοι (υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ τους)

ο $[\cdot]_B$ είναι ισομορφισμός.

↳ Δύο ισόμορφοι χώροι για την Γραμμική Άλγεβρα, είναι το ίδιο πράγμα!

Για άλλη βάση οι συντεταγμένες θα ήταν διαφορετικές:

(v_1, v_2) Βάση B

(v_2, v_1) Βάση B'

$$v_1 + 3v_2 \in V, \quad v = v_1 + 3v_2 \qquad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άλλο παράδειγμα: 3.4.23

$v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ (είναι 3 όσο η διάσταση και είναι γ. ανεξάρτητα επειδή σχηματίζουν κλιμακωτό πίνακα)

"B_0 βάση"

και

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = B_1$ βάση

$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad [v]_{B_0} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$f: V \to W$ ισομορφισμός, άρα:

1] f γραμμική

2] f 1-1

3] f επί

$\Big\} \to \exists f^{-1}: W \mapsto V$

$w \in W$ $\quad f^{-1}(w) =$ το μοναδικό στοιχείο του V ώστε $f(v) = w$

$v_1 = f^{-1}(w_1)$
$v_2 = f^{-1}(w_2)$

δ.δ.ο. $\{f^{-1}$ γραμμική$\}$: $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1+v_2)) = v_1 + v_2$
$= f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$.

Δύο ισόμορφοι χώροι έχουν την ίδια διάσταση.

- $V \xrightarrow{\varphi} W$ $\quad \varphi$: μονομορφισμός

  $\dim V \leq \dim W$

Έστω $v_1, ..., v_n$ βάση του V, άρα γ.α.

φ 1-1 $\Rightarrow$ $\underbrace{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)}_{n}$ γ.α.

$\Rightarrow n = \dim V \leq \dim V$

- φ "ισομορφισμός" τότε η φ^{-1} $W \to V$ είναι μονομορφισμός

  άρα $\dim W \leq \dim V$

3.4.23

- Είναι ο $\mathbb{R}^n$ ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^m$; $n \neq m$ <u>όχι</u>

- $V \cong W$ είναι σχέση ισοδυναμίας

"ισόμορφο"

→ $V \cong V$ ✓ Id

→ $V \cong W \Rightarrow W \cong V$, πράγματι :

$$\varphi : V \to W \ , \ \varphi^{-1} : W \to V$$

→ $V \cong W$, $W \cong X$ $\quad \Big\}\ \varphi \circ \psi : V \xrightarrow{\cong} X$

$\varphi : V \to W$

$\psi : W \to X$

↳ Δύο χώροι ίδιας διάστασης πεπερασμένοι είναι ισόμορφοι.

$$\begin{tikzcd}
B \quad V \arrow[r] \arrow[d, "{[\ ]_B}"', "\cong"] & W \quad B' \arrow[d, "{[\ ]_{B'}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, equal] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$\dim V = \dim W = \mathbb{R}$

● Η σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική

$$\varphi \circ G(v_1 + v_2) = \varphi\big(G(v_1) + G(v_2)\big) = \varphi(G(v_1)) + \varphi(G(v_2))$$

γραμμικές

$$\varphi \circ G(\lambda v) = \varphi(\lambda(G(v)) = \lambda \varphi(G(v)) .$$