ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1,\dots,v_n \in V$ θα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Διαφορετικά θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένα.

Με άλλα λόγια, η εξίσωση με άγνωστους $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ έχει ως λύση πάντα την μηδενική λύση $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \underbrace{(0,\dots,0)}_{n}$

Αν η μοναδική λύση είναι η μηδενική λύση τα διανύσματα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα.
Διαφορετικά, — " — γραμμικά εξαρτημένα.

Παράδειγμα: $V_1 = (1,0,0)$, $V_2 = (0,1,0)$, $V_3 = (0,0,1)$ είναι γ.α.

Πράγματι, $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0 \Rightarrow$ {μηδεν. του $\mathbb{R}^3$: $0 = (0,0,0)$}

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0)$$

μοναδική μηδενική λύση $\Rightarrow$ γ.α.

Παράδειγμα: $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,0)$

$\hookrightarrow \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,0) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{λύσεις του συστήματος: } \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

άρα τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα!

Παρατήρηση:

- Έστω $v \in V$. Το $\{v\}$ είναι γ.α. αν $v \neq 0_V$
  Ενώ, αν $v = 0_V$, τότε είναι γ. εξαρτημένο.
  Πράγματι: $\lambda \cdot 0_V = 0_V \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
  $v_1 = 0_V \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 = 0_V$.
- Αν $v \neq 0_V$ και $\exists\, \lambda v = 0_V$ με $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$
  $0_V = \lambda^{-1}(0_V) = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}\lambda v = I_{\mathbb{R}} v = v$.

24.3.23

$\boxed{v_1, \dots, v_n \ (n \geq 2)}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη

Έστω $v_{i_0} = \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq i_0}}^{n} \lambda_v v_v \iff v_{i_0} \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_n \rangle$

Τότε $\sum_{\substack{v=1 \\ v \neq i_0}}^{n} \lambda_v v_v - v_{i_0} = 0 \rightsquigarrow$ $\lambda_{i_0} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, -1, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_n)$ είναι μη-μηδενική λύση της $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$

Αν $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ και $\lambda_i \neq 0$ $\iff -\lambda_{i_0} v_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \lambda_i v_i \iff v_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \left(\frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \right) v_i$

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $v_1, \dots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το v γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_n$.

Πράγματι, αν $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ και $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$

Αφαιρώ κατά μέλη

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \xRightarrow[\gamma.\alpha.]{v_i} \lambda_i - \mu_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\boxed{\lambda_i = \mu_i}$$

- $\emptyset \neq I \subset \{v_1, \dots, v_n\}$ γ.α

I γ.α.

SOS!

πχ) v_1, v_2, v_4

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4 = 0 \iff \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3 + \lambda_4 v_4 + 0 v_5 + 0 v_6 = 0$

<u>Συμπέρασμα</u>: $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$

άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$

"Αν τα διανύσματα είναι γ.α., και τα λιγότερα διανύσματα θα είναι γ.α."

σελ. ③ για γ.ε.

24.3.23

Αντίστοιχα, $\underbrace{\{v_1,\dots,v_n\}}_{\gamma.\varepsilon.} \rightsquigarrow \underbrace{\{v_1,\dots,v_n, \mathbf{v}\}}_{\gamma.\varepsilon.}$

μια μη-μηδενική λύση (υπάρχει ένα $\lambda_{i_0}\neq 0$):

$$0=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i + 0v$$

"Αν προσθέσω διανυσμα σε γ.ε. διανύσματα, θα μείνουν γ.ε."

↳ Προσοχή! Τα αντίθετα και για τα 2, δεν ισχύουν:

- $\underbrace{\{v_1,\dots,v_n\}}_{\gamma.\alpha.} \longrightarrow \{v_1,\dots,v_n,\mathbf{v}\}$
  ↳ μπορεί γ.α. ή γ.ε
- $\underbrace{\{v_1,\dots,v_n\}}_{\gamma.\varepsilon.} \supsetneq I$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

- $\underbrace{\underbrace{(1,0,0),\ (0,1,0)}_{\gamma.\alpha.},\ (0,0,1)}_{\gamma.\alpha.}$

- $\underbrace{\underbrace{(1,0,0),\ (0,1,0)}_{\gamma.\alpha.},\ (1,1,0)}_{\gamma.\varepsilon.}$ γιατί το $(1,1,0)$ είναι γρ. συνδιασμός των προηγουμένων (τα πρόσθεσα).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & & \\ & & & a_{34} & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

→ (Άνω) κλιμακωτός πίνακας

μη-μηδενικές

$\boxed{\text{Οι γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες}}$

γιατί;

$\lambda_1(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})$
$\lambda_2(0,0,a_{23},\dots)$
$\lambda_3(0,0,0,a_{34},\dots)$

$-\lambda_1 a_{11}\neq 0$

παράδειγμα
⤳

24.3.23

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \cdot \\ \lambda_2 \cdot \\ \lambda_3 \cdot \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & \pi \\ 0 & 4 & 5 & 7 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1,\ 2\lambda_1+4\lambda_2,\ 3\lambda_1+5\lambda_2,\ 6\lambda_1+7\lambda_2+6\lambda_3, \dots\dots)$$

$$\parallel$$

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$\lambda_1=0$ $\quad \lambda_2=0$ $\quad \lambda_3=0 \Rightarrow$ γ.α.

$\Sigma \subset V$.
- Αν το Σ είναι πεπερασμένο έχουμε ορίσει τι σημαίνει γ.α και γ.ε.
- Αν $\Sigma=\emptyset$, το θεωρούμε γ.α. $\left(\emptyset \subset \underset{v\neq 0}{\{v\}} \rightsquigarrow \text{γ.α.}\right)$
- Αν Σ άπειρο, τότε θα λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένο αν και μόνο αν υπάρχει υποσύνολό του πεπερασμένο και γραμμικά εξαρτημένο.

  Ενώ γ.α. θα είναι αν δεν είναι γ.ε., δηλαδή αν <u>κάθε</u> πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γ.α.

$\boxed{\text{Άσκηση}}$ (SOS λυκείου).

Έστω ένα σύνολο $\{v_1,\dots,v_n\}$ γ.α. και έστω $\{v_1,\dots,v_n,v\}$ γ.ε. Τότε το $v\in\langle v_1,\dots,v_n\rangle$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αφού $\langle v_1,\dots,v_n,v\rangle$ γ.ε., η εξίσωση $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda v=0$ έχει μια μη-μηδενική λύση. Αν σε αυτή τη μη μηδ. λύση το $\lambda=0$, τότε έχω μια μη-μηδενική λύση του

$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n=0 \rightsquigarrow$ άρα τα $v_1,\dots,v_n$ γ.ε. <u>άτοπο</u>

Άρα $\lambda\neq 0$

$$v=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)v_i$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το $\{v_1,\dots,v_n\}$ γ.ε
$\Updownarrow$
κάποιο από αυτά είναι γρ. συνδυασμός των υπολοίπων.

Η άσκηση ζητά ότι αυτό είναι το v!

24.3.23

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ Το σύνολο $S \subset V$ θα λέγεται **βάση** αν:

1) Είναι γ.α.
2) $\langle S \rangle = V$

<u>Στόχος</u>: Όλες οι βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων και το πλήθος αυτό το ονομάζουμε διάσταση.

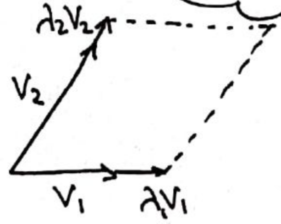
Ένας χώρος έχει άπειρες βάσεις

· Έστω $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του V.

Κάθε $v \ni V$ <u>γράφεται</u> με <u>μοναδικό τρόπο</u> ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης.

γ.α.

η βάση παράγει τον χώρο



$\langle v_1 \rangle \rightsquigarrow$ ευθεία

$\langle v_1, v_2 \rangle \rightsquigarrow$ επίπεδο.

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

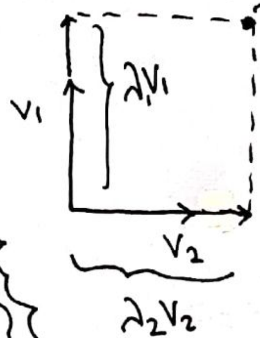
$$v \longrightarrow \Phi(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

v_1, v_2

Σημείο

$P = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$



$v + v'$:

$$\left.\begin{array}{l} v = \sum \lambda_i v_i \\ v' = \sum \lambda_i' v_i \end{array}\right\} v + v' = \sum (\lambda_i + \lambda_i') v_i$$

$$v \longrightarrow \varphi(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$v' \longrightarrow \varphi(v') = (\lambda_1', \dots, \lambda_n')$$

$$v + v' \longrightarrow \varphi(v + v') = (\lambda_1 + \lambda_1', \dots, \lambda_n + \lambda_n')$$

πράξη στο V πράξη στο $\mathbb{R}^n$

$$\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$$

Η βάση με βοηθά να ορίσω συντεταγμένες