Γραμμική Άλγεβρα Ι. 10.2.23

Σύνολα: Διάλεξη ①

$x \in A$ να είναι πρόταση. πχ) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1\} = A$

$\cdot \sqrt{2} \in A$ ψευδής πρόταση.

↳ Russel: $\boxed{\text{Παράδοξο}}$

X το σύνολο των συνόλων που δεν ανήκαν στον εαυτό τους
$X \in X$ και $X \notin X$.

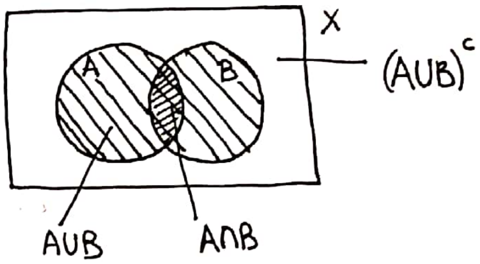
πχ) Ο κουρέας ενός χωριού ξυρίζει μόνο όσους δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
Ποιος κουρεύει τον Κουρέα;

- $A \subset B$: "Το A είναι υποσύνολο του B αν $x \in A \Rightarrow x \in B$".
  - → $A \subset B$ αληθές ακόμα και αν $A = B$.
  - → $A \subsetneq B \rightsquigarrow A \subset B$ και $\exists x \in B$ με $x \notin A$

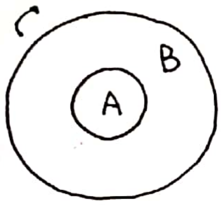
Συμβολισμός:
$\boxed{\begin{array}{l} A \subset B \rightsquigarrow A \subseteq B \\ A \subsetneq B \rightsquigarrow A \subset B \end{array}}$

Ορισμός $A = B$ αν $A \subset B$ και $B \subset A$

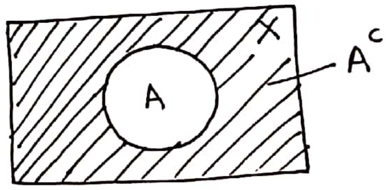
- A, B σύνολα $A \subset X$, $B \subset X$
  - $A \cup B = \{x \in X, x \in A$ ή $x \in B\}$
  - $A \cap B = \{x \in X, x \in A$ και $x \in B\}$



$A \subset B$



- $A^c = \{x \in X, x \notin A\}$
- $A \setminus B = \{x \in X, x \in A$ και $x \notin B\}$
  $= A \cap B^c$



- $A^c = X \setminus A$
- $(A^c)^c = A$

απόδειξη

$x \in (A^c)^c \overset{op}{\Longleftrightarrow} x \notin A^c \overset{op}{\Longleftrightarrow} x \in A$

$\left.\begin{array}{l} "\Rightarrow" : (A^c)^c \subset A \\ "\Leftarrow" : (A^c)^c \supset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = (A^c)^c$

- $\emptyset$: κενό σύνολο
  ↳ ή $\{\}$.
  $\forall x \in X : x \in \emptyset$ ψευδής.

- $(\emptyset)^c = X$, $(X)^c = \emptyset$

- $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$, $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$
- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup X = X$, $A \cap X = A$
- $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

• $(A\cup B)\cup\Gamma = A\cup(B\cup\Gamma)$ 10.2.23

• $x\in(A\cup B)\cup\Gamma \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x\in(A\cup B)$ ή $x\in\Gamma$
$\Longleftrightarrow x\in A$ ή $x\in B$ ή $x\in\Gamma$
$\Longleftrightarrow x\in A$ ή $x\in(B\cup\Gamma)$
$\Longleftrightarrow x\in A\cup(B\cup\Gamma)$

"$\Longrightarrow$" $(A\cup B)\cup\Gamma \subset A\cup(B\cup\Gamma)$

"$\Longleftarrow$" $(A\cup B)\cup\Gamma \supset A\cup(B\cup\Gamma)$.

• $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$ ① και $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

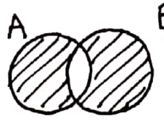
• $x\in(A\cup B)^c \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x\notin(A\cup B) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\notin A \\ \text{και} \\ x\notin B\end{matrix}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\in A^c \\ \text{και} \\ x\in B^c\end{matrix}\right. \Longleftrightarrow x\in A^c\cap B^c$

• $x\in(A\cap B)^c \Longleftrightarrow x\notin(A\cap B) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\notin A \\ \text{ή} \\ x\notin B\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\in A^c \\ \text{ή} \\ x\in B^c\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x\in A^c\cup B^c$.

Αλλιώς με το ① $(A\cap B) = (A^c)^c\cap(B^c)^c = (A^c\cup B^c)^c \Longleftrightarrow (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

Συμμετρική Διαφορά

$A\dotplus B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x\in X : x\in A_i$ για κάποιο $i\in I\}$ πχ) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0,1)$

$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x\in X : x\in A_i$ για κάθε $i\in I\}$

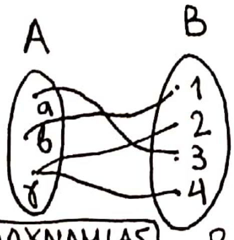
A, B σύνολα. $A\times B = \{(\alpha,\beta) : \alpha\in A, \beta\in B\}$: Καρτεσιανό Γινόμενο

$A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ $A\times B = \{(\alpha,2),(\alpha,4),(\beta,2),(\beta,4),(\gamma,2),(\gamma,4)\}$.

$B = \{2,4\}$

$\{1,2\} = \{2,1\}$.

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}\}$! $(1,2)\neq(2,1)$!

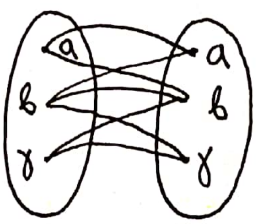


Διμελής σχέση : $R\subset A\times B$

$R = \{(\alpha,3),(\beta,1),(\gamma,2),(\gamma,4)\}$.

ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ $R\subset A\times A$

- $(\alpha,\alpha)\in R \quad \forall\alpha\in A$
- $(\alpha,\beta)\in R \Rightarrow (\beta,\alpha)\in R$
- $(\alpha,\beta)\in R$ και $(\beta,\gamma)\in R \Rightarrow (\alpha,\gamma)\in R$



Την ισοδυναμία την συμβολίζουμε $\alpha\sim\beta \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) = R \subsetneq A\times B$

πχ) Η ισότητα τριγώνων είναι μια ισότητα, αλλά η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. $\boxed{10.2.23}$

Μια διαμέριση ενός συνόλου A, είναι να γράψουμε το A ως (διαμέριση) των A_i.

$$A=\bigcup_{i\in I} A_i \qquad A_i\cap A_j=\varnothing.$$

Μια σχέση ισοδυναμίας ορίζει μια διαμέριση (και μια διαμέριση ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας.)

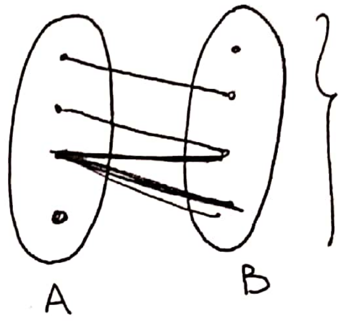
$a\in A$: $K_a=\{x\in A \ \ x\sim a\}$

πχ) μια κλάση ισοδ: όσοι φοιτητές κάθονται στην ίδια σειρά.

$$A=\bigcup_{a\in I} K_a \qquad K_a\cap K_b=\{x\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\sim x \\ b\sim x\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.x\sim b\right\} \Rightarrow a\sim b \Rightarrow K_a=K_b.$$

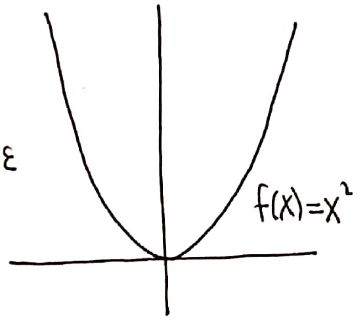
Το σύνολο των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας είναι το σύνολο πηλίκο.

$\boxed{\text{Συνάρτηση}}$: $R\subset A\times B$
για κάθε $a\in A$ να υπάρχει μοναδικό $b\in B$ ώστε $(a,b)\in R$



} όχι συνάρτηση

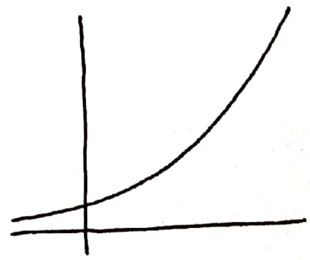
γράφημα της Συνάρτησης.
Αφού το b είναι μοναδικό μπορούμε να το συμβολίσουμε με $f(a)=b$.



$f: A\to B$
$\Gamma\subset A$
$f(\Gamma)$ εικόνα του Γ, $f(\Gamma)=\{b\in B$ ώστε $\exists a\in\Gamma$ με $f(a)=b\}$.

- Αν $f(A)=B$, τότε η f είναι επί.
- Αν $f(x)=f(x')$, τότε $x=x' \Rightarrow$ f 1-1

$f: A\to A$ είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι επί } όχι



A, σύνολο, ($\#A$: το πλήθος των στοιχείων του)

Αν $f: A\to A$ είναι 1-1 και $\#A<\infty$
~~τότε~~ ανν είναι επί

$$e^x: \mathbb{R}\xrightarrow[\text{όχι επί}]{1-1}\mathbb{R}$$

- $R \subset A \times B$
- Σχέσεις Ισοδυναμίας
- Συναρτήσεις

↳ $(a,b) \in R$, $\forall a \in A\ \exists!\, b = f(a)$

f 1-1 όχι: $a, b \Rightarrow f(a) = f(b)$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

f επί $f(A) = B \iff \forall b \in B\ \exists a : f(a) = b$.

$f : A \to B$, $g : A' \to B'$ } λέγονται ίσες αν $A = A'$, $B = B'$

υποσύνολο που ορίζει την "σχέση". — $\Gamma_f \subset A \times B$, $\Gamma_f = \Gamma_g$

$\Gamma_f = \{(a, f(a)) = (a, b)\}$

$f(a) = g(a)\ \forall a \in A$.

• Αν η f είναι 1-1 και επί τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

$\forall b \in B\ \exists!\, a \in A : f(a) = b$

Άρα $\Gamma_f \subset A \times B$

$(a, f(a)) \to (f(a), a) \in B \times A$ ικανοποιεί την ιδιότητα της συνάρτησης.

$a = f^{-1}(b)$ αντίστροφη συνάρτηση.

$a \xrightarrow{f} b$, $a = f^{-1}(b)$

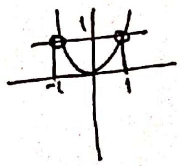
παράδειγμα: $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

⇝ δεν είναι 1-1 και δεν είναι επί.
↳ (δεν υπάρχει x ώστε $x^2 < 0$).

$\mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$

⇝ είναι επί αλλά όχι 1-1.

$+1 \to 1$, $-1 \to 1$.



⇝ θεωρώ $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $x \mapsto x^2$

1-1, επί ✓

• $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma$

$g \circ f(a) = g(f(a))$.

$a \xmapsto{f} f(a) \xmapsto{g} g(f(a))$

$a \xmapsto{g \circ f} g(f(a))$.

f επί και 1-1, g επί και 1-1 } $\Rightarrow$ $g \circ f$ επί και 1-1.

Απόδειξη:

Έστω $\gamma \in \Gamma$. g επί, άρα $\exists b \in B : g(b) = \gamma$. f επί, άρα $\exists a \in A : f(a) = b$ } $\Rightarrow g(f(a)) = g(b) = \gamma \Rightarrow g \circ f(a) = \gamma$. ■

↳ για το 1-1: Αν $g(f(a)) = g(f(b)) \overset{g\ 1-1}{\Rightarrow} f(a) = f(b) \overset{f\ 1-1}{\Rightarrow} a = b \Rightarrow g \circ f$ 1-1.

● Αν f, g αντιστρέψιμες, τότε και η $g \circ f$ είναι αντιστρέψιμη και ισχύει:

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}.$$

Γενικά: $f \circ g \neq g \circ f$

$Id: A \to A$ 13.2.23

$a \to Id(a) = a$ $\Gamma_{Id} = \{(a,a) \in A \times A\}$.

- Μια συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφο f^{-1}:

$\boxed{\begin{array}{l} f \circ f^{-1} = Id_B \\ f^{-1} \circ f = Id_A \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A \\ B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B \end{array}}$ $\leadsto$ $a \to f(a) \to f^{-1}(f(a)) = a$.

$\hookrightarrow b \to f^{-1}(b) \to f(f^{-1}(b)) = b$.

- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{h} \Delta$

$\underbrace{}_{h \circ g}$, $(h \circ g) \circ f$.

ή

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \Gamma \xrightarrow{h} \Delta$, $g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$.

προσεταιριστική

Για να δείξω ότι είναι ίσες: $A \to \Delta$

$a \in A$:

$(h \circ g) f(a) = h(g(f(a)))$ και $h \circ (g \circ f)(a) = h \circ (g(f(a))) = h(g(f(a)))$.

$\hookrightarrow$ για να αποδείξω την $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$:

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1}$

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1} = Id_B \circ g \circ g^{-1}$

$= g \circ g^{-1} = Id_\Gamma$

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου: το σύνολο των δυνατών υποσυνόλων.

Παράδειγμα: $A = \{a, b, \gamma\}$.

υποσύνολα: Με 0 στοιχεία	Με 1 στοιχείο	Με 2 στοιχεία	Με 3 στοιχεία
$\emptyset$	$\{a\}, \{b\}$	$\{\gamma, b\}, \{a, \gamma\}, \{a, b\}$	$\{a, b, \gamma\}$

$\hookrightarrow$ 8 στοιχεία το δυναμοσύνολο.

$\hookrightarrow$ έχει 2^n στοιχεία $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Έστω $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ το πλήθος των υποσυνόλων με k στοιχεία ενός συνόλου, από ένα σύνολο με n-στοιχεία.

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$ $\leadsto$ αποδεικνύεται με επαγωγή.

$\hookrightarrow$ το # του δυναμοσυνόλου αποδεικνύεται με αυτόν τον τύπο για $x=1$.

13.2.23

ΕΠΑΓΩΓΗ $P(n)$ $n\in\mathbb{N}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(1) \text{ αληθής} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \right\}$

αξίωμα ελαχίστου στοιχείου
$A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset \Rightarrow$ το A έχει ελάχιστο

Έστω A το σύνολο των φυσικών για τους οποίους δεν ισχύει η πρόταση
(θα δείξουμε ότι το αξίωμα ελαχίστου δίνει την επαγωγή)

- Αν $\boxed{A=\emptyset}$ η πρόταση ισχύει $\forall n\in\mathbb{N}$.
- Αν $\boxed{A\neq\emptyset}$ τότε $A\subseteq\mathbb{N}$, έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω n_0.

Άρα $n_0\in A \Rightarrow P(n_0)$ ψευδής.
$1 \leq n_0-1 < n_0 \Rightarrow n_0 \notin A \Rightarrow P(n_0-1)$ αληθής.
άτοπο αφού $P(n_0-1)$ αληθής και η $P(n_0)$ πρέπει να είναι αληθής από επαγωγή. ∎

Ανάποδα: $A\subset\mathbb{N}$ μη κενό σύνολο, θδο έχει ελάχιστο στοιχείο.

- $1\in A$, το 1 είναι ελάχιστο.
$P(1)$
- $P(n)$ για κάποιο $1\leq k\leq n$ $k\in A$ τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο.
$\Downarrow$
$P(n+1)$ αν $1\leq k\leq n+1$ $k\in A$ τότε το A έχει ελάχιστο
αν $k\in A$ $1\leq k\leq n$, τότε το A έχει ελάχιστο από την $P(n)$.
$k=n+1$ και είναι το ελάχιστο. ∎

Παράδειγμα:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

- $P(1) = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1=1$ ισχύει.
- Υποθέτω $P(n)$= αληθής: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(n+1)(2n+1)n}{6}$
και θ.δ.ο. $P(n+1)$: αληθής.

$$1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2 = \underbrace{1^2+2^2+\ldots+n^2}_{P(n)}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \Rightarrow$$

Πρέπει νδο:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{\cancel{6}} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{\cancel{6}}$$

$$\Rightarrow \cancel{(n+1)}[n(2n+1)+6(n+1)] = \cancel{(n+1)}(n+2)(2(n+1)+1) \Rightarrow$$

$$2n^2+n+6(n+1) = (n+2)(2n+3) \Rightarrow 2n^2+n+6(n+1) = 2n^2+3n+4n+6 \Rightarrow$$

$$2n^2+n+6n+6 = 2n^2+3n+4n+6 \Rightarrow$$

$$2n^2+7n+6 = 2n^2+7n+6$$

ισχύει.