- Ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής ενός πίνακα είναι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της (από τα αριστερά στα δεξιά)

$$\begin{matrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{7} & 8 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{matrix} \Bigg\} \text{ Ηγετικά στοιχεία}$$

- Κλιμακωτός άνω τριγωνικός είναι ένας πίνακας:

1) Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής να είναι μονάδα
2) Αν έχει μια μηδενική γραμμή, όλες οι γραμμές κάτω από αυτή να είναι μηδενικές
3) Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής να βρίσκεται αριστερά από τα ηγετικά στοιχεία των από κάτω γραμμών.

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 4 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{όχι ανηγμένος (3η γραμμή πχ)}$$

↳ Ένας κλιμακωτός άνω τριγωνικός θα λέγεται "ανηγμένος" αν τα ηγετικά στοιχεία είναι τα μοναδικά μη-μηδενικά στοιχεία σε κάθε στήλη.

$$(A|b) \leftarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ : ανηγμένος άνω τριγωνικός κλιμακωτός}$$

$\boxed{\text{Η μέθοδος του Gauss}}$ : ο $(A|b)$ επαυξημένος πίνακας του συστήματος $Ax=b$ μετατρέπεται σε έναν ισοδύναμο με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πίνακα, ο οποίος είναι ανηγμένος άνω τριγωνικός κλιμακωτός.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 5 \\ x_4 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x_5 \in \mathbb{R},\ x_4 = 0,\ x_6 = 0,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 = -3x_3 + 5.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ : $x_3, x_5$ ελεύθερες μεταβλητές

Άρα με την απαλοιφή Gauss
πάω από $(A|b) \longrightarrow$ πίνακα αυημένο άνω κλιμακωτό.

Ξεκινάω με την πρώτη στήλη μη μηδενική, και κοιτάω αν το πάνω αριστερά στοιχείο είναι μη μηδενικό, και αν δεν είναι το αλλάζω με ένα από κάτω, αλλάζοντας την γραμμή.

πχ) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Αν η στήλη είναι μηδενική, την αγνοώ και πάω στην επόμενη.

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{matrix}$$

Μηδενίζω τα τελευταία στοιχεία της πρώτης στήλης.
(κάτω από τη διαγώνιο)

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-9/2 & -12/2 \\ 0 & 1-15/2 & 1-20/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & -13/2 & -9 \end{pmatrix} -13/7$$

Μηδενίζω το 3ο στοιχείο της 2ης στήλης (αυτό κάτω από την διαγώνιο).

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \cdot \frac{13}{-7} - 9 \end{pmatrix}$$

πρέπει να τα κάνω ① και τα 3 στοιχεία (τα στοιχεία της διαγωνίου)

θα δούμε άλλο παράδειγμα με ευκολότερες πράξεις



Scanned with CamScanner

22.2.23

$\boxed{\underbrace{E(i,j,\lambda)}_{I_n}\cdot A_{n\times m}}$ → ο πίνακας στον οποίο έχω πολλαπλασιάσει την $i$-γραμμή με $\lambda$ και την έχω προσθέσει στην $j$-γραμμή

$I_n$: στον οποίο έχω πολ/σει με $\lambda$ την $i$-γραμμή και την έχω προσθέσει στην $j$.

$\boxed{\text{παράδειγμα}}$: $E(1,3,\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + B$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3^{η}$ γραμμή, $1^{η}$ στήλη →

$$E_n(i,j,\lambda) = I_n + B$$

$$B = (\beta_{\kappa\lambda}) = \begin{cases} \lambda & \kappa = j,\ \lambda = i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$E_n(i,j,\lambda)\cdot A = (I_n + B)\cdot A = A + B\cdot A$$

• $B\cdot A = (\gamma_{\kappa\lambda})$, $\gamma_{\kappa\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\kappa\nu}\alpha_{\nu\lambda}$ ∘ ο ο $\beta_{\kappa\nu} = \lambda$ αν $\kappa = j, \nu = i$

$\gamma_{\kappa\lambda} = 0$ αν $\kappa \neq j$

$\gamma_{j\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{j\nu}\alpha_{\nu\lambda} = \lambda\cdot\alpha_{i\lambda}$

Δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών αν υπάρχει ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών που φέρνει τον ένα πίνακα στον άλλο. → "γραμμοϊσοδύναμοι"

↳ $A \sim B$ αν υπάρχει ακολουθία πινάκων $E_1, \dots, E_s$ όπου $E_i$ πίνακας που αντιστοιχεί σε Σ.Μ.Γ. → Στοιχειώδης Μετασχ/μός Γραμμών — $E_i^{-1}$ υπάρχει

και $\boxed{A = E_1 \cdots E_s \cdot B}$

↳ Η ιδιότητα της γραμμοϊσοδυναμίας (Σχέση ισοδυναμίας)

Άρα

• Ο $A$ είναι γραμ/μος με τον εαυτό του:

$A = E(1,2)E(2,1)A$

• $A \sim B \Rightarrow A = E_1 \cdots E_s B$

$B = \underbrace{E_s^{-1} \cdots E_1^{-1}}_{\text{πράγματι}} \cdot A \Rightarrow B \sim A$

$E_s^{-1} \cdots \underbrace{E_1^{-1} \cdot E_1}_{I_n} \cdots E_s = I_n$

} Αποδείξεις.

$\Leftarrow \begin{cases} \rightsquigarrow A \sim A \\ \rightsquigarrow A \sim B \Leftrightarrow B \sim A \\ \rightsquigarrow \begin{matrix} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{matrix} \Leftrightarrow A \sim \Gamma \end{cases}$

∘ ο

$E(i,j)^{-1} = E(j,i)$

$E(i,\lambda)^{-1} = E(i, 1/\lambda)$

$E(i,j,\lambda)^{-1} = E(i,j,-\lambda)$

22.2.23

$$\left.\begin{array}{l} A\sim B \\ B\sim \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A\sim\Gamma$$

<u>Απόδειξη</u>: $A\sim B \Rightarrow A = E_1 \cdots E_s B$

$B\sim\Gamma \Rightarrow B = E_1' \cdots E_s' \Gamma$

$$\Rightarrow A = E_1\cdots E_s \cdot E_1' \cdots E_s' \Gamma \Rightarrow A\sim\Gamma$$

---

Παραμετρικό Σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-6z=\lambda \\ 2x+y-2z=8 \\ 2x+3y-22z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -6 \\ \boxed{2} & 1 & \\ \boxed{2} & 3 & \end{array}\right.}_{A} \underbrace{\left|\begin{array}{c} \lambda \\ 8 \\ 5 \end{array}\right)}_{b} \begin{array}{l} \\ -2 \\ -2 \end{array}$$

θα μπορούσα να κάνω τα ίδια στο σύστημα, αλλά έτσι είναι καλύτερα χωρίς περιττές πληροφορίες

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 0 & -1 & 10 & 8-2\lambda \\ 0 & 1 & -10 & 5-2\lambda \end{array}\right) + \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 0 & -1 & 10 & 8-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13-4\lambda \end{array}\right)$$

τώρα κοιτάω εδώ

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & \lambda \\ 0 & 1 & -10 & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 13-4\lambda \end{array}\right)$$

$0x+0y+0z = 13-4\lambda \Rightarrow \lambda = 13/4$

Άρα αν $\lambda = 13/4$ έχω λύσεις

αν $\lambda \neq 13/4$ το σύστημα είναι <u>αδύνατο</u>.

Για $\lambda = 13/4$:

θα τον κάνω άνω κλιμακωτό

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 13/4 \\ 0 & 1 & -10 & -8+2\frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) - \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -16 & 8-13/4 \\ 0 & 1 & 10 & -8+\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 16z + 8 - 13/4 \\ y = -10z - 8 - 13/2 \end{array} \quad z\in\mathbb{R}$$

λ λ

ή $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8-\lambda \\ -8+2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ ~ παραμετρική εξίσωση ευθείας στον χώρο (Γεωμετρία).