$\underset{n\times n}{A}$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν υπάρχει $n\times n$ πίνακας A^{-1}:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$$ ⤳ ο αντίστροφος είναι μοναδικός!

1) 1×1 πίνακες (a_{11}) είναι αντιστρέψιμοι, αν $a_{11}\neq 0$.

2) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}_{2\times 2}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\boxed{\underbrace{ad-cb}_{\text{ορίζουσα}}\neq 0}$ και $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}}$

Διαγώνιοι Πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{mm}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix} d_{11}b_{11} & & & 0 \\ & d_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\gamma_{ij}=\sum_{v=1}^{n} d_{iv}b_{vj} \quad \begin{cases} d_{iv}=0, & \text{εκτός αν } i=v \\ b_{vj}=0, & \text{εκτός αν } j=v\end{cases}$$

$$= d_{ii}b_{ij} \begin{cases} 0, & i\neq j \\ d_{ii}b_{ii}, & \text{αν } i=j\end{cases}$$

Συμπέρασμα:

3) Ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μη-μηδενικά

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{d_n}\end{pmatrix}$$

$$\underset{n\times m}{\overset{(a_{ij})}{A}} \longrightarrow \underset{m\times n}{\overset{(a_{ji})}{A^t}}$$

$(\underset{n\times m}{A}\cdot \underset{m\times l}{B})^t = B^t\cdot A^t$

? $\Rightarrow$ $\underset{m\times n}{A^t}\cdot \underset{l\times m}{B^t}$ δεν μπορούν πάντα να πολλ/στούν, ενώ όταν $\underset{l\times m}{B^t}\cdot \underset{m\times n}{A^t}$ γίνεται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\Gamma = A\cdot B = (\gamma_{ij})$

$$\gamma_{ij}=\sum_{v=1}^{m} a_{iv}b_{vj}$$

$$\underset{\text{ανάστροφος}}{\gamma_{ji}} = \sum_{v=1}^{m} \underset{A^t}{a_{vi}}\,\underset{B^t}{b_{jv}} = \sum_{v=1}^{m} b_{jv}a_{vi} \quad \blacksquare$$

Να δουλέψω αυτό το παράδειγμα για να το καταλάβω:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^t αντιστρέψιμος:

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος υπάρχει A^{-1}: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Άρα $(AA^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n^t = I_n$

$\underbrace{(A^{-1})^t}_{} \cdot A^t = A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$

Ο ανάστροφος ενός διαγώνιου πίνακα είναι ο ίδιος ο πίνακας.

αυτός ο πίνακας ικανοποιεί την συνθήκη του αντίστροφου, ο αντίστροφος είναι μοναδικός.

Γενικό Γραμμικό Σύστημα

$$\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ερωτήματα:

1) Έχει το σύστημα λύση;
2) Είναι η λύση μοναδική; Αν όχι πως μπορώ να βρω όλες τις λύσεις;

- $m = n$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε:

$$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Leftrightarrow X = A^{-1}b.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Αν ο πίνακας $\underset{n\times n}{E}$ είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα:

$AX = b$ έχει τις ίδιες λύσεις με το σύστημα $\underset{n\times n}{E}\,\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{X} = E\underset{n\times 1}{b}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Πράγματι, αν το x είναι λύση του $AX = b \Rightarrow \underbrace{(EA)X = (Eb)}_{\text{λύση του ίδιου συστήματος}}$
- Αν x ικανοποιεί την $EAX = Eb \Rightarrow$ $E^{-1}(EAX) = E^{-1}(Eb) \Rightarrow$ $(EE^{-1})AX = (E^{-1}E)b \underset{I_n}{\Rightarrow} AX = b$.

Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων:

$$\underset{\text{αληθές}}{AX = b} \Rightarrow O_{n\times m}AX = O_{n\times m}b \Rightarrow \underset{\text{αληθές}}{O_{n\times 1}X = O_{n\times 1}}$$

Στοιχειώδης Μετασχηματισμοί Γραμμών.

20.2.2023

$\underset{n\times m}{A}X = \underset{n\times 1}{b}$ ⟶ επαυξημένος πίνακας : $(A|b)$

n γραμμές
m+1 στήλες

παράδειγμα

$$3x + 5y = 1$$
$$4x + y = 2$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Μετασχηματισμοί

- Πολλαπλασιασμός της i γραμμής με λ, $\lambda \neq 0$
- Ανταλλαγή δυο γραμμών
- Πολλαπλασιασμός της i γραμμής με $\lambda \in \mathbb{R}$ και πρόσθεση στην j-γραμμή

↳ Αν την κάθε μια από αυτές τις διαδικασίες την εφαρμόσουμε στον ταυτοτικό πίνακα I_n, παίρνουμε έναν πίνακα $E^{n\times n}$ ο οποίος έχει την ιδιότητα : $E \cdot A$ ⟶ πίνακας όπου έχουμε εφαρμόσει την διαδικασία.

<u>παράδειγμα</u>.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (αλλάζω τις γραμμές)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

⤳ (άλλαξαν οι γραμμές).

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{και την προσ/τω στην } 2^{η}]{\text{πολ/ζω την } 1^{η} \text{ γραμμή με } (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Συμπέρασμα: έγινε η ίδια αλλαγή στον επαυξημένο!

3 διαδικασίες επί των γραμμών ⟶ E (πίνακας) ⟶ $E \cdot A$

E ↓ εφαρμόζω την διαδικασία στον I_n

$E \cdot A$ ↳ πίνακας στον οποίο έχω εφαρμόσει την διαδικασία

20.2.23

$E(i,j)$ ταυτοτικός στον οποίο έχει αλλάξει θέση η i με την j γραμμή.

$E(i,j)E(i,j) = I_n$, άρα ο $E(i,j)$ είναι αντιστρέψιμος

$$\begin{array}{c} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 \ldots \\ & & 1 & 0 & 0\;0\;0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή, για να κάνω μια αλλαγή σε έναν πίνακα A, μπορώ να την κάνω στον ταυτοτικό, να πάρω τον νέο πίνακα E, και πολλαπλασιάζοντάς τον στον A, γίνεται η αλλαγή στον A.

$E(-\lambda,i,j)\,E(\lambda,i,j) = I_n$

$\hookrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E(\lambda,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E(-\lambda,1,2)\cdot E(\lambda,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Η διαδικασία που το επαναφέρει.

ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-3) \end{array} \sim$$

θέλω μηδενικά.

Αν η πρώτη στήλη δεν έχει μη μηδενικό στοιχείο δεν λέει "τίποτα" για το x:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0x + \ldots = \ldots \\ 0x + \ldots = \ldots \\ 0x + \ldots = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & | & 1/3 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \cdot(5) \sim$$

θέλω 1 άρα πολ/ζω με $(-\frac{1}{3})$

θέλω μηδέν

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & | & 1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -1/3 & | & -1/3 \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{1}{2}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & | & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & | & 1/6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \end{array}$$

θέλω 1

$\hookrightarrow$ Σκοπός είναι να φτιάξω "τον ταυτοτικό".

20.2.23

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 7/6 & 7/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x + 1/6\, w = 1/6$$
$$y + 1/2\, w = 1/2$$
$$z + \frac{1}{6} w = 1/6$$

Άρα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w \in \mathbb{R}$ } Το συνολο των λυσεων μου εξαρτώμενο απο μια παράμετρο.