Από την προηγούμενη φορά:

$$(A\cdot B)\cdot \Gamma = A\cdot(B\cdot\Gamma) = D = (d_{ij})$$

$$\cdot\ d_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{e} \underbrace{a_{i\nu}}_{\text{άθροισμα πάνω στο } m} \underbrace{b_{\nu\mu}\gamma_{\mu j}}_{\text{άθροισμα πάνω στο } e}$$

οι πίνακες, όταν τους πολλαπλασιάζουμε έχουν το εσωτερικό γινόμενο (θυμάμαι γεωμετρία) και, σε διαφορά με τους πραγματικούς αριθμούς, 2 στοιχεία μπορούν να δώσουν γινόμενο μηδέν, χωρίς να είναι μηδενικά!

π.χ) $(1, -1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

- $A(BC) = (AB)C$
- $(A+A')B = AB + A'B$ } Επιμεριστική ιδιότητα
- $A(B+B') = AB + AB'$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$

$\underset{n\times m}{A} + \underset{n\times m}{A'} = (a_{ij} + a'_{ij})$

$\underset{n\times m}{(A+A')}\cdot\underset{m\times e}{B} = (\gamma_{ij})$

$$\gamma_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m}(a_{i\nu} + a'_{i\nu})b_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{m}(a_{i\nu}b_{\nu j} + a'_{i\nu}b_{\nu j}) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu}b_{\nu j}}_{AB} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{m} a'_{i\nu}b_{\nu j}}_{A'B}$$

- I_n ~ ο ταυτοτικός πίνακας

τετραγωνικός πίνακας $n\times n$ πίνακας : $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}a & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$

Γενικά $\boxed{I_n\cdot A = A\cdot I_n = A}$ (*) Για κάθε πίνακα A.

Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $\quad (\delta_{ij}) = I_n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (*) ~ $(\gamma_{ij}) = I_n\cdot A = \sum_{\nu=1}^{n}\delta_{i\nu}a_{\nu j} \xrightarrow[i\neq\nu]{\delta_{i\nu}=0} \gamma_{ii}a_{ij}$

οι όροι $\delta_{i\nu}$ με $i\neq\nu$ δεν μένουν στο αποτέλεσμα διότι το γίν θα βγαίνει 0.

~ $(d_{ij}) = A\cdot I_n$

$$d_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\delta_{\nu j} = a_{ij}\cancelto{1}{\delta_{jj}} = a_{ij}$$

17.2.2023

$\boxed{\text{Ερώτημα}}$: Δίνεται πίνακας $n\times n$ A. Υπάρχει πίνακας A' $n\times n$ ώστε $AA' = A'A = I_n$ (?)

Για τους πραγματικούς αντίστοιχα: $a\cdot a' = a'\cdot a = 1$, ναι ανν $a \neq 0$. $2x=1$ όχι αν $x\in\mathbb{Z}$, ναι αν $x\in\mathbb{Q}$.

πχ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ ⇝ υπάρχει A' ώστε $A'\cdot A = I_2$? $\Rightarrow$ $A'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Δεν υπάρχει, παρόλο που $A\neq 0$.

Έστω ότι $A'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A'\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}_{O_{2\times 2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_n}\cdot\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ <u>άτοπο</u> ⇝ ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ <u>δεν αντιστρέφεται</u>.

Διαφορετικά: Έστω ότι υπάρχει $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}$ και ότι ισχύει:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+\omega & z+\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ⇝ πρέπει $x+y=1$ και $x+y=0$ <u>άτοπο</u>.

- $ax=b$ ⇝ Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση.

⇝ $a\neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = b/a$

⇝ $a=0$ → $b=0$ αληθής για κάθε $x\in\mathbb{R}$
→ $b\neq 0$ αδύνατη.

- Σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots &+ a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\ \vdots \qquad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots &+ a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{\overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}}$$

↳ Αν A είναι αντιστρέψιμος με A^{-1} ο αντίστροφος, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $X = A^{-1}B$.

↳ $AX = b \Rightarrow$

$A^{-1}(AX) = A^{-1}b \overset{\text{προσετ.}}{\Rightarrow} (A^{-1}A)X = A^{-1}b \Rightarrow I_n X = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$

↳ ($I_n X = X I_n = X$ $\forall X$ πίνακα)

17.2.2023

Πως θα αναγνωρίζω ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

Κάθε πίνακας ορίζει μια συνάρτηση : (A $n\times m$)

$$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

⇝ Γραμμική συνάρτηση: $A(X+X') = AX + AX'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$ n-άδα

⇝ είναι 1-1 και επί $n=m$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμο με το να είναι ο A αντιστρέψιμος.

$AX=b$ έχει μοναδική λύση για κάθε b.

↳ $\boxed{\text{Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός}}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $A=(a_{ij})$ είναι ένας $n\times n$ πίνακας

$$\boxed{\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})}$$

πχ) $\lambda\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & 5\lambda & 6\lambda \end{pmatrix}$

Τι πάει να πει βαθμωτός;

- Πολ/μός Πραγματικών: $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda\mu$
- Βαθμωτός Πολ/μός: $\mathbb{R}\times(\text{πίνακες}) \to (\text{πίνακες})$, $(\lambda, A) \longmapsto \lambda A$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $1\cdot A = A$
- $\underbrace{(\lambda\mu)}_{\text{πολλ/μός πραγματικών}} A = \underbrace{\lambda(\mu A)}_{\text{βαθμωτός πολ/μός}}$
- $\underbrace{(\lambda+\mu)}_{\text{πρόσθεση πραγματικών}} A = \underbrace{\lambda A + \mu A}_{\text{πρόσθεση πινάκων}}$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(A\cdot B) = A\cdot\lambda B$

$$(\lambda+\mu)A = ((\lambda+\mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \mu(a_{ij}) = \lambda A + \mu A.$$

Απόδειξη $\lambda(A\cdot B) = (\lambda A)B$, $(\gamma_{ij}) = AB$

⇝ $\gamma_{ij} = \sum_{v=1}^{m} a_{iv} b_{vj}$

⇝ $(\lambda\gamma_{ij}) = \lambda\left(\sum_{v=1}^{m} a_{iv} b_{vj}\right) = \sum_{v=1}^{m} (\lambda a_{iv}) b_{ij}$

$\Downarrow$

$(\lambda A)B$.

A, B αντιστρέψιμοι πίνακες n×n. Τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος $\Big\}$ $\boxed{(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}}$ 17.2.23

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

A αντιστρέψιμος $\overset{op}{\iff}$ υπάρχει A^{-1} n×n ώστε $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

B αντιστρέψιμος $\overset{op}{\iff}$ υπάρχει B^{-1} n×n ώστε $B^{-1}B = BB^{-1} = I_n$

$$(AB)\boxed{B^{-1}\cdot A^{-1}} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$\boxed{(B^{-1}A^{-1})}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Ο αντίστροφος πίνακας, αν υπάρχει, πρέπει να είναι μοναδικός

↳ Γενική απόδειξη : Έχουμε $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$A'A' = A'A = I_n$

$\rightsquigarrow (AA^{-1}) = I_n \Rightarrow A'(AA^{-1}) = I_nA' \Rightarrow$

$(A'A)A^{-1} = A' \Rightarrow I_nA^{-1} = A' \Rightarrow A^{-1} = A'$ ∎

1×1 πίνακες $(a_{11})(b_{11}) = (a_{11}b_{11})$

Ένας πίνακας (a_{11}) : αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a_{11} \neq 0$.
1×1

2×2 πίνακες: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-cd & -bc+da \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Περιπτώσεις:

- Αν $ad-bc=0$ $AA'=0$ A όχι αντιστρέψιμος.

  $I_2 = A^{-1}A$

  $0 \neq A' = I_2A' = A^{-1}\underbrace{AA'}_{0}$ άτοπο.

- Αν $ad-bc \neq 0$, A αντιστρέψιμος.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$