$D : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j + r_j' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

2) $D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

3) $D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \overset{r_j = r_i}{=} 0$

4) $D(I_n) = 1$

- Για 1×1 πίνακες: $D(a_{11}) = a_{11}$
- Για 2×2 πίνακες: $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Αν μια γραμμή είναι μηδενική τότε $\boxed{D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

- $D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s + 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \underset{\text{ιδιότητα } 1}{=} D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \Rightarrow D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0$ ∎

⟶ γίνεται και με την ιδιότητα 2.

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Αν αλλάξω θέση σε δυο γραμμές η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο:

$$\boxed{D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = -D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

2 ίδιες γραμμές

$$0 = D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}_{0} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \overbrace{D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}^{0} \Rightarrow D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0$$ ∎

Στοιχειώσεις Μετασχηματισμοί γραμμών και Ορίζουσα.

10.3.2023

1] Πολλαπλασιασμός γραμμής με $\lambda \neq 0$ (σχέση 2)

2] Εναλλαγή γραμμών (αλλαγή στο πρόσημο)

3] Πολλαπλασιασμός i-γραμμής με $\lambda \neq 0$ και πρόσθεση στη j-γραμμή.

$$D\begin{pmatrix} r_1 \\ r_i \\ \lambda r_i + r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ \lambda r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\cancel{D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}}}_{0 \text{ (ίσες γραμμές)}} + D\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

ισότητα 2

↳ A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον B : $D(A) \neq 0 \Rightarrow D(B) \neq 0$.

Κριτήριο: Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow D(A) \neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

- A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A \sim I_n$

  $D(I_n) = 1 \neq 0 \Rightarrow D(A) \neq 0$.

- A δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = B$ ↳ $D(B) = 0 \Rightarrow D(A) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{n \times n}$$

Για i,j: $1 \leq i,j \leq n$ | A_{ij} $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει με διαγραφή της i-γραμμής και j-στήλης.

↳ διάλεξη 8

$$f_j(A) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+j} a_{\nu j} \cdot D(A_{\nu j})$$ ⟶ D : συνάρτηση ορίζουσας για τους $(n-1)\times(n-1)$ πίνακες.

Θα δείξω ότι αυτή είναι συνάρτηση ορίζουσας και είναι μοναδική

Πρώτα θα δείξουμε ότι ισχύει κάθε ιδιότητα :

10.3.23

1] $f_i\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s + r_s' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{v=1 \\ v\neq s}}^{n} (-1)^{v+j} a_{vj} D(A_{vj}) + (-1)^{s+j}(a_{sj} + a'_{sj}) D(A_{sj})$

πίνακας στον οποίο έχουμε διαγράψει την n-γραμμή και την j-στήλη

ξεχώρισα τη γραμμή από το άθροισμα

$= \sum_{\substack{v=1 \\ v\neq s}}^{n} (-1)^{v+j} a_{vj} \left(D(A_{vj}) + D(A'_{vj}) \right)$ → ιδιότητα ορίζουσας.

$+ (-1)^{s+j} a_{sj} D(A_{sj}) + (-1)^{s+j} a'_{sj} D(A_{sj}) =$

$= f_i(A) + f_i(A')$. → $A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s' \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ ▨

2] $f_i\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ \lambda r_s \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{v=1 \\ v\neq s}}^{n} (-1)^{v+j} a_{v+j} D(A_{vj}) + (-1)^{s+j} (\lambda a_{sj}) \cdot D(A_{sj})$

πίνακας του οποίου η s ή s-1 γραμμή είναι πολλαπλ/νη με λ, άρα περνά έξω.

$= \lambda \left[\sum_{\substack{v=1 \\ v\neq s}}^{n} (-1)^{v+j} a_{v+j} D(A_{vj}) + (-1)^{s+j} (a_{sj}) \cdot D(A_{sj}) \right]$. ▨

3] Έστω τώρα ότι ο A έχει 2 γραμμές ίσες: $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s \\ \vdots \\ r_t \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ $r_s = r_t$, $s < t$.

Αν διαγράψω την v γραμμή $v \neq s,t$, τότε $D(A_{vj}) = 0$.

$f_j(A) = \sum_{v=1}^{n} (-1)^{v+j} a_{vj} D(A_{vj})$

$= (-1)^{s+j} a_{sj}\, D(A_{sj}) + (-1)^{t+j} a_{tj} D(A_{tj})$ ⊛

• $A_{sj} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_{s-1} \\ r_{s-2} \\ \vdots \\ r_{t-1} \\ r_t \\ r_{t+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$ → t-1 θέση ίδια γραμμή • $A_{tj} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_{s-1} \\ r_s \\ r_{s+1} \\ \vdots \\ r_{t-1} \\ r_t \\ r_{t+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$ → s θέση ⇝ θα την αλλάξω όσες φορές χρειαστεί με τις κάτω σειρές ώστε να βρεθεί στη θέση t-1. Πόσες είναι αυτές;

↳ ο πίνακας A_{tj} γίνεται ο A_{sj} μετά από t-s-1 εναλλαγές.

$\circledast = (-1)^{s+j} a_{sj} D(A_{sj}) + (-1)^{t+j} a_{sj} \left[(-1)^{t-s-1} D(A_{sj}) \right]$ 10.3.23

$= (-1)^{j+s+1}$

$\blacksquare$

4] $f_i(I_n) = \sum_{v=1}^{n} (-1)^{j+v} \delta_{vj} D((I_n)_{vj})$ . . .

$I_n = (\delta_{ij})$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & j \neq i \end{cases}$

για $v \neq j$ όλα αυτά είναι 0 άρα μένει:

$(-1)^{j+j} \delta_{jj} D((I_n)_{jj})$

$1 \quad 1 \quad 1$

$(I_n)_{jj}$: ο ταυτοτικός, μια διάσταση λιγότερη.

Τώρα θα δείξω ότι η ορίζουσα είναι μοναδική, ως προς όλες τις στήλες:

$A = (a_{ij})$. $\quad D(A) = D \begin{pmatrix} \sum_{v_1=1}^{n} a_{1v_1} e_{v_1} \\ \sum_{v_2=1}^{n} a_{2v_2} e_{v_2} \\ \vdots \\ \sum_{v_n=1}^{n} a_{nv_n} e_{v_n} \end{pmatrix} = \circledast\circledast$

$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) = \sum_{v_1=1}^{n} a_{1v_1} e_1$

πχ) $(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = a_{11} \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + a_{12} \underbrace{(0,1,0)}_{e_2} + a_{13} \underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$

$\circledast\circledast = \sum_{v=1}^{n} a_{1v_1} D \begin{pmatrix} e_{v_1} \\ \sum_{v_2=1}^{n} a_{2v_2} e_2 \\ \vdots \\ \sum_{v_n=1}^{n} a_{nv_n} e_n \end{pmatrix} = \dots =$ το επαναλαμβάνω για όλες τις γραμμές.

$= \sum_{v_1=1}^{n} \sum_{v_2=1}^{n} \dots \sum_{v_n=1}^{n} a_{1v_1} a_{2v_2} a_{3v_3} \cdots a_{nv_n} \boxed{D \begin{pmatrix} e_{v_1} \\ \vdots \\ e_{v_n} \end{pmatrix}}$

είναι μη-μηδενικό όταν όλες οι γραμμές είναι διαφορετικές!

Μεταθέσεις. 10.3.23

$\sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{1, \dots, n\}$ λέγεται μετάθεση.

Ποιό είναι το σύνολο των μεταθέσεων? $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,s(2)} \cdots a_{n,s(n)} D \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

Άρα αυτό που είχα πριν:

$$\sum_{v_1=1}^{n} \sum_{v_2=1}^{n} \cdots \sum_{v_n=1}^{n} a_{1v_1} a_{2v_2} \cdots a_{nv_n} D \begin{pmatrix} e_{v_1} \\ e_{v_2} \\ \vdots \\ e_{v_n} \end{pmatrix}$$

μετάθεση
συνάρτηση 1-1 και επί.

$$D \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = (-1) \text{ ή } (+1) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 1 \\ \sigma(3) = 3 \end{matrix}$$

Αντιμετάθεση είναι η αλλαγή 2 μόνο στοιχείων.

Μπορεί να μας δώσει τον ταυτοτικό με γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Άρα $D(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)$.

$$D \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

μοναδικός

$\# S_2 = 2! = 2$

$\sigma(1) = 1$	$\sigma(1) = 2$
$\sigma(2) = 2$	$\sigma(2) = 1$
$\boxed{\mathrm{sgn} = 1}$	$\boxed{\mathrm{sgn} = -1}$

μια αντιμετάθεση.

$\# S_3 = 3! = 6$ Άρα η ορίζουσα πίνακα 3x3 έχει 6 προσθετέους.

Μνημονικός κανόνας στην επόμενη σελίδα