

Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Ενδιάμεση εξέταση (29-4-2023)

Θέμα 1ο.

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (i) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας.
- (ii) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα η f να μην είναι μετρήσιμη, αλλά η $|f|$ να είναι μετρήσιμη.
- (iii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $[0, 1]$ με $F^\circ = \emptyset$ και $\lambda(F) > 1 - \varepsilon$.

Θέμα 2ο.

- (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο Borel $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) = 0$.
- (β) Αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, αποδείξτε ότι, για κάθε σύνολο Borel $B \subset \mathbb{R}$, το $g^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.
- (γ) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με την ιδιότητα: για κάθε $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ το $g^{-1}(Z)$ είναι μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι μετρήσιμη.

Θέμα 3ο.

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: Για κάθε $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$ ισχύει $\int_E |f| < \varepsilon$.
- (β) Η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_{-\infty}^x f$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4ο.

- (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n \cdot \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq n\})] = 0.$$

- (β) Έστω (f_n) μια αύξουσα ακολουθία ολοκληρώσιμων (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f . Αποδείξτε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$.

Τα 4 θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία 12 μονάδες.

Καλή επιτυχία