Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Εξέταση Σεπτεμβρίου (4-9-2023)

Θέμα 1ο.

(α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < +\infty$.

(i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $B \subset A$ με $\lambda(B) = \lambda(A)/2$.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο S των αριθμών του $[0, 1]$, που έχουν ένα δεκαδικό ανάπτυγμα στο οποίο εμφανίζεται άπειρες φορές το ψηφίο 6, είναι σύνολο Borel.

Θέμα 2ο.

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$, μετρήσιμο, φραγμένο και τέτοιο ώστε ο περιορισμός της f στο E να είναι φραγμένη συνάρτηση, με την ιδιότητα

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Θέμα 3ο.

(α) Έστω X χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το f είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f\left(B(0, \delta)\right) \neq \mathbb{R}$.

(β) Στον διανυσματικό χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, θεωρούμε τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ με $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$ και $\|\cdot\|_1$ με $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Έστω $t_0 \in [0, 1]$. Ορίζουμε $T : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ με $T(f) = f(t_0)$ για κάθε $f \in C[0, 1]$. Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής και ότι ο $T : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένος, ενώ ο $T : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένος.

Θέμα 4ο.

(α) Έστω H χώρος Hilbert και Y γραμμικός υπόχωρος του H. Αποδείξτε ότι ο Y είναι κλειστός αν και μόνο αν $Y = Y^{\perp\perp}$.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι, για κάθε $y \in H$, υπάρχει $z \in H$ με $\langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle$, για κάθε $x \in H$.

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία 12 μονάδες.

Καλή επιτυχία