

Βασική Πραγματική και Συναρτησιακή Ανάλυση

Πέμπτη, 12 Ιουνίου 2025

1. (α) (1. μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A+t) = \lambda^*(A)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) (1 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Σωστό ή λάθος;

(i) Αν $\lambda^*(A) = 0$ τότε το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν $\lambda^*(A) > 0$ τότε $\text{int}(A) \neq \emptyset$.

(γ) (1.5 μ.) Βρείτε $A \subseteq \mathbb{R}$ μη φραγμένο με $0 < \lambda^*(A) < \infty$.

2. (α) (1.5 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

(ii) Υπάρχει G_δ -σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$.

(β) (1 μ.) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Δείξτε ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα και ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$ τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

3. (α) (1 μ.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο και $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Αν $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ επί του A κατά σημείο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(β) (1 μ.) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel σύνολο και $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

4. (α) (1 μ.) Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b - \varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη στο (a, b) .

(β) (1 μ.) Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \geq 0$ στο A για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda.$$

5. (α) (1.5 μ.) Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ κατά σημείο. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| d\lambda \rightarrow \int |f| d\lambda.$$

(β) (1.5 μ.) Δείξτε ότι $\int_1^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} d\lambda(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ είτε μέσω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης είτε με υπολογισμό και πλήρη αιτιολόγηση.

Καλή Επιτυχία!