ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
718. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ
27 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2023

- Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $2 + \frac{1}{2}$ μονάδες.
- Ο μέγιστος βαθμός λαμβάνεται με την συμπλήρωση 10 μονάδων.
- Να λύσετε όσα θέματα θέλετε.
- Εξετάζεστε με ανοικτές τις σημειώσεις.
- Ο συμβολισμός των διατυπώσεων είναι ο ίδιος με αυτόν στις σημειώσεις.
- Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

$\boxed{\text{I.}}$ (ομαλό λήμμα Urysohn, Θεώρημα 1.10.3.1) Έστω $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ τ.ω.:

1. $f|_S \equiv 1$,
2. $f(S^\varepsilon \smallsetminus S) = (0,1)$ και
3. $f|_{(S^\varepsilon)^c} \equiv 0$.

$\boxed{\text{II.}}$ (πλήρης μετρικός χώρος L^p_{loc}) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $p \in [1,\infty]$.

1. Εφοδιάστε το $L^p_{loc}(U;\mathbb{F})$ με μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{L^p_{loc}(U;\mathbb{F})}\colon \left(L^p_{loc}(U;\mathbb{F})\right)^2 \to [0,\infty)$.
2. Χαρακτηρίστε την ακολουθιακή σύγκλιση στον $\left(L^p_{loc}(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{L^p_{loc}(U;\mathbb{F})}\right)$.
3. Δείξτε ότι ο $\left(L^p_{loc}(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{L^p_{loc}(U;\mathbb{F})}\right)$ είναι πλήρης.

$\boxed{\text{III.}}$ (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(C^\infty_c)'$, Πρόταση 4.1.1.1) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Δείξτε ότι

$$\left\{f\colon C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}\,\middle|\, f \text{ γραμμική } \& \ f|_{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})} \text{ συνεχής}, \ \forall U_0 \subset\subset U\right\} =$$
$$= \Big\{f\colon C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}\,\Big|\, f \text{ γραμμική } \& \ \forall U_0 \subset\subset U, \ \exists\,(K>0 \ \& \ k \in \mathbb{N}) \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: } |f(g)| \le K\|g\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}, \ \forall g \in C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})\Big\}.$$

$\boxed{\text{IV.}}$ (κανονικές κατανομές του $(\mathcal{S})'$, Πρόταση 4.1.3.2) Έστω $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

1. Δείξτε ότι
$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} g(x)f(x)\mathrm{d}x\right| < \infty, \ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$
2. Θέτοντας
$$\ell_f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$
$$g \mapsto \ell_f(g) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)f(x)\mathrm{d}x,$$
δείξτε ότι $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

$\boxed{\text{V.}}$ Έστω $x \in \mathbb{R}^m$.

1. Έστω $m = 1$. Θεωρώντας την $\chi_{(x,\infty)} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, δείξτε ότι $D\ell_{\chi_{(x,\infty)}} \in (C^\infty_c(\mathbb{R};\mathbb{F}))'_s$.
2. Θεωρώντας την $\delta_x \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s$, δείξτε ότι $\mathcal{F}\delta_x \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$.