

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ 20/9/2023

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΠΕΝΤΕ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{ον} Α. Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση της μορφής $f(z) = u(x) + iv(y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Β. Έστω α πραγματικός αριθμός $\neq 0$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} [\log(\alpha + iy) - \log(\alpha - iy)].$$

Υπόδειξη. Διακρίνατε τις περιπτώσεις: « $\alpha > 0$ » και « $\alpha < 0$ ».

Θέμα 2^{ον} Α. Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ανοικτή περιοχή του κλειστού δίσκου $\overline{\Delta(a, R)}$ τότε υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$|f(z) - f(w)| \leq M|z - w| \text{ για κάθε } z, w \in \overline{\Delta(a, R)}.$$

Β. Έστω f, g ολόμορφες συναρτήσεις στον τόπο Ω με $f(z) \cdot g(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Αποδείξτε ότι ή $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$.

Θέμα 3^{ον} Α. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Liouville, αποδείξτε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

Β. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy.

Θέμα 4^{ον} Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πόλο στο a τάξης m και η συνάρτηση g έχει πόλο στο a τάξης k . Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$\text{Res} \left(\frac{\sin(z-a)}{e^z} \cdot \frac{f'(z)g'(z)}{f(z)g(z)}, a \right).$$

Θέμα 5^{ον} Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2/3} \frac{\sin^2(\pi z) dz}{(2z-1)\log^3(1-z)}.$$

Θέμα 6^{ον} Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ έτσι ώστε

$$P_n(z) \rightarrow \frac{z(e^z - 1)^5}{(\pi^z - 1)^2 (1 - \cos z)^2}, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα για $z \in \mathbb{C}$ με $1 \leq |z| \leq 2$. Πόσο είναι το $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0)$;