Μιγαδική Ανάλυση Ι – Εξέταση Ιανουαρίου 2023
20 Ιανουαρίου 2023

1. (1+1.25μ.) (α) Αποδείξτε ότι κάθε ρίζα της εξίσωσης $(z+1)^3 + z^3 = 0$ βρίσκεται στην ευθεία $x = -\frac{1}{2}$.

(β) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $z \in \Omega$ ισχύει ότι $(f(z)+1)^3 + (f(z))^3 = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

2. (1+1+1μ.) (α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές, δηλαδή $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

(β) Έστω $u(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$ πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Αποδείξτε ότι η u είναι το πραγματικό μέρος ολόμορφης συνάρτησης $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Να υπολογιστεί η f.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

3. (1+1.25μ.) (α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $a \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι η f έχει ρίζα στο a τάξης $m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο στο a τάξης 1 με $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m$.

(β) Έστω $P(z) = (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots(z-a_k)^{m_k}$, $z \in \mathbb{C}$ πολυώνυμο βαθμού n, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_k$ οι διακεκριμένες ρίζες του P $(m_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, k)$. Έστω επίσης $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ και $R > 0$ ώστε $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ και $|a_i| \leqslant R$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = 2\pi i n.$$

4. (1+1+1.25μ.) (α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$. Θέτουμε $M(a,r) = \sup\{|f(\zeta)| : |\zeta - a| = r\}$. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένη την έκφραση των παραγώγων $f^{(n)}(a)$, $n \geqslant 0$ ως επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων με τη βοήθεια της f και του κύκλου $C(a,r)$, αποδείξτε τις εκτιμήσεις του Cauchy, δηλαδή

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant n!\frac{M(a,r)}{r^n}, \qquad n \geqslant 0.$$

(β) Αποδείξτε το θεώρημα του Liouville: Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, η οποία είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Τότε, η f είναι σταθερή.

(γ) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ όλόμορφη συνάρτηση ώστε $v = \mathrm{Im} f \geqslant 0$ στο $\mathbb{C}$, όπου $f = u + iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

5. (1+1.25μ.) (α) Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_{C(1,2)} \frac{\cos z}{z^7}\,dz \quad \text{και} \quad \int_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}\,dz.$$

(β) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ στον δακτύλιο $\Delta(0,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ και στον δακτύλιο $\Delta(0,1,+\infty) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < +\infty\}$ και κατόπιν να υπολογιστεί το $\int_{C(0,\varrho)} f(z)\,dz$ για $\varrho > 0$ με $\varrho \neq 1$.

Καλή Επιτυχία!