$\boxed{\text{Μάθημα 33}}$ $\boxed{21/12/2022}$

Υπενθύμιση

Αν $S \subseteq \mathbb{C}$, τότε το S αποτελείται από μεμονωμένα σημεία αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $r>0$ ώστε $\Delta(a,r) \cap (S \setminus \{a\}) = \emptyset$

Αν $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $S' \cap \Omega = \emptyset$ τότε το S έχει την παραπάνω ιδιότητα

(Πράγματι αν $a \in S$ και δεν είναι μεμονωμένο σημείο, τότε $\forall r>0$ θα ισχύει ότι $\Delta(a,r) \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ και άρα $a \in S' \cap S \subseteq S' \cap \Omega$ Άτοπο)

Θα δείξαμε ότι αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f \not\equiv 0$ τότε το σύνολο $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Δηλαδή ότι οι ρίζες της f είναι μεμονωμένες

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε είτε 1) Η f είναι ταυτοτικά 0, δηλαδή

$$Z(f) = \Omega$$

ή

2) Το σύνολο $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, δηλαδή $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$

Απόδειξη

Απο το προηγούμενο Λήμμα, έπεται ότι $Z(f)'\cap \Omega$ είναι ανοικτό και κλειστό στο Ω.
Όμως το Ω είναι τόπος.
Άρα είτε

1) $Z(f)'\cap\Omega \neq \emptyset$ πυ σημαίνει ότι
$\Omega = Z(f)'\cap \Omega$ άρα $\Omega = Z(f)'\cap\Omega \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$
$\Rightarrow Z(f)=\Omega$

ή

2) $Z(f)'\cap\Omega=\emptyset$ το οποίο σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις σημαίνει ότι το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία του Ω

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή της μοναδικότητας ή της ταυτότητας ή αρχή της αναλυτικής συνέχισης

Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος, $S\subseteq\Omega$ και $z_0\in\Omega$ σημείο συσσώρευσης του S. Αν f,g είναι ολόμορφες συναρτήσεις στο Ω ώστε $f(z)=g(z), \forall z\in S$ τότε $f=g$ στο Ω

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η $f-g$ είναι ολόμορφη στο Ω και $S\subseteq Z(f-g)$. Έπεται ότι $z_0\in S'\cap\Omega\subseteq Z'(f-g)\cap\Omega$ και έτσι από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $f=g$ στο Ω

Σημείωση

Η υπόθεση $S' \cap \underline{\Omega} \neq \emptyset$ και $f=g$ στο S, μπορεί να αντικατασταθεί από την ισοδύναμη υπόθεση:

Υπάρχει $z_0 \in \underline{\Omega}$ και μια ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ με $z_n \neq z_m$ $\forall n \neq m$ ώστε $z_n \to z_0$ και $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \geq 1$

Παρατήρηση

1) Είναι ουσιώδες στο προηγούμενο Θεώρημα ότι $\exists$ σ.σ. του S μέσα στο $\underline{\Omega}$

Πράγματι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ και $g(z) = 0$ ορισμένες στο $\underline{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, επίσης το $z_0 = 0$ είναι το μοναδικό σ.σ. του $S = \{\frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ όμως $f \neq g$

Αυτό συμβαίνει γιατί $0 \notin \underline{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Σημείωση Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$ επεκτείνει μια συνάρτηση $h : S \to \mathbb{C}$, όπου $S \subseteq \underline{\Omega}$ αν $f(z) = h(z)$ για κάθε $z \in S$.

Ας υποθέσουμε ότι $\underline{\Omega}$ τόπος και $S \subseteq \underline{\Omega}$ τ.ω. $S' \cap \underline{\Omega} \neq \emptyset$

Η αρχή της μοναδικότητας μας λέει ότι αν μια $h : S \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση $f : \underline{\Omega} \to \mathbb{C}$, τότε η επέκταση αυτή είναι μοναδική

Παραδείγματα

1) Αν $f(z)=\sin z,\ z\in\mathbb{C}$ τότε η f είναι η μοναδική ολόμορφη επέκταση της $h(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$
($f=h$ στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}'\cap\mathbb{C}\neq\emptyset$ π.χ. $0\in\mathbb{R}'\cap\mathbb{C}\ (=\mathbb{R})$)
Το ίδιο ισχύει προφανώς και για την $g(z)=\cos z,\ z\in\mathbb{C}$

2) Έστω $a_n=(1+\frac{1}{n})^n,\ n\geq 1$ και $S=\{a_n : n\geq 1\}$
Αν $h: S\to\mathbb{R}$ ώστε $h(a_n)=n\cdot\log(1+\frac{1}{n}),\ n\geq 1$
τότε ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι η μοναδική ολόμορφη επέκταση της h στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$

Πράγματι η $\log z$ προφανώς επεκτείνει την h στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ και το σύνολο S έχει (μοναδικό) σ.σ. τον αριθμό $e=2,718\ldots$ αφού $a_n\to e$, με $e\in\mathbb{C}_\pi$ $(e\in S'\cap\mathbb{C}_\pi)$

3) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες
a) $\sin^2 z+\cos^2 z=1,\ z\in\mathbb{C}$
b) $\cos(-z)=\cos z,\ z\in\mathbb{C}$

Λύση
a) Θέτουμε $F(z)=\sin^2 z+\cos^2 z-1,\ z\in\mathbb{C}$
Ως γνωστόν $F(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Αλλά $\mathbb{R}'\cap\mathbb{C}=\mathbb{R}'=\mathbb{R}\neq\emptyset \underset{\mathbb{C}\ \text{τόπος}}{\Longrightarrow} F\equiv 0$ στο $\mathbb{C}$
από αρχή μοναδικότητας

b) Θέτουμε $F(z) = \cos(-z) - \cos z$ και έχουμε $F(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ με $\mathbb{R}' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset \overset{\text{οπωσπριν}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow F \equiv 0$ στο $\mathbb{C} \Rightarrow \cos(-z) = \cos z \ \forall z \in \mathbb{C}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \not\equiv 0$. Αν $a \in \Omega$ είναι ρίζα της f τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $h(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m h(z)$, $z \in \Omega$

Απόδειξη

Από προηγούμενο Θεώρημα το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία.
Επομένως $\exists r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$
Η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a η οποία συγκλίνει για $|z-a| < r$
Επειδή $f|_{\Delta(a,r)} \not\equiv 0$ και $f(a) = 0$, από το Λήμμα στην αρχή της παραγράφου $\exists$ ολόμορφη $g: \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $z \in \Delta(a,r)$

(Μάλιστα $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Delta(a,r)$)

Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ως εξής
$h(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$ και $h(a) = g(a)$

32ο ΜΑΘΗΜΑ 21/12/22

ΜΙΓ ΑΝΑΛΥΣΗ (2η ώρα)

Θεώρημα Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \neq 0$. Αν $a \in \Omega$ είναι ρίζα της f, τότε $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ και $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $h(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m h(z)$, $z \in \Omega$.

Αποδ.
Από προηγούμενο θεώρημα το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Επομένως $\exists$ $r>0$: $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$. Η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά κέντρου a η οποία συγκλίνει για $|z-a|<r$. Επειδή $f|_{\Delta(a,r)} \neq 0$ και $f(a)=0$ από το λήμμα στην αρχή της παραγράφου $\exists$ ολόμορφη $g: \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$, $z \in \Delta(a,r)$

(μάλιστα $g(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \Delta(a,r)$)

Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ως εξής:
$$h(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}, \text{ για } z \in \Omega \setminus \{a\} \text{ και } h(a) = g(a)$$

Παρατηρούμε ότι η $h|_{\Omega \setminus \{a\}}$ είναι ολόμορφη ως πηλίκο ολομόρφων. Επίσης $h(z) = g(z)$ για $z \in \Delta(a,r)$ και επειδή η g είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(a,r)$, η h έχει μιγαδική παράγωγο στο a και βέβαια $h(a) = g(a) \neq 0$.

Παρατήρηση Το ζεύγος (m,h) είναι μοναδικό
↳ του προηγ θεωρήματος

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι (m_1, h_1) είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, ώστε $(z-a)^{m_1} h_1(z) = (z-a)^{m} h(z)$, $z \in \Omega$

Ας υποθέσουμε χ.τ.γ. ότι $m_1 > m$. Τότε θα έχουμε $(z-a)^{m_1-m} h_1(z) = h(z)$, $z \in \Omega \setminus \{a\}$ (*)

Από την (*) αφήνοντας το $z \to a$ έπεται ότι $h(a) = 0$, Άτοπο.

Συνεπώς $m_1 = m$ και έτσι $h_1(z) = h(z)$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Από τη συνέχεια των h_1, h στο a θα έχουμε $h(a) = \lim_{z \to a} h(z) = \lim_{z \to a} h_1(z) = h_1(a)$.

Έτσι έχουμε τελικά $m = m_1$ και $h_1 = h$.

Ορισμός: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \not\equiv 0$ και $a \in \Omega$ ρίζα της f. Ονομάζουμε το μοναδικό αριθμό m του προηγούμενου θεωρήματος τάξη της ρίζας a.

Κριτήριο Εύρεσης της Τάξης μιας ρίζας

Έστω f ολόμορφη στον τόπο Ω, $f \not\equiv 0$, a ρίζα της f και $m \in \mathbb{N}$. Τ.Α.Ε.Ι.

a) Ο ακέραιος m ισούται με την τάξη της ρίζας a της f.

β) $0 = f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(m-1)}(a)$ και $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Αποδ.

Αποδ (α) $\Rightarrow$ (β) Από το προηγούμενο θεώρημα $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ και h ολόμορφη στο Ω ώστε $h(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m h(z)$, $z \in \Omega$. Αν $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ τότε $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, για $|z-a|<r$ (h αναλυτική)

Άρα $f(z) = (z-a)^m (c_0 + c_1(z-a) + \dots + c(z-a)^n + \dots) =$
$= c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \dots + c_n(z-a)^{m+n} + \dots$, $|z-a|<r$

Θέτουμε $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ και $a_m = c_0$, $a_{m+1} = c_1, \dots, a_{m+k} = c_k$,

και έχουμε $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ ⊛⊛

Από την ⊛⊛ και επειδή $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, $k \geq 0$ έπεται ότι $0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a)$ και
$f^{(m)}(a) = m!\, a_m = m!\, c_0 = m!\, h(a) \neq 0$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Η f είναι αναλυτική, έστω αν $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ τότε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ή $f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{m-1}(z-a)^{m-1} + \dots$
$|z-a|<r$. Από την υπόθεσή μας, επειδή $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, $k \geq 0$,

έπεται ότι $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ και $a_m \neq 0$. Συνεπώς
$f(z) = (z-a)^m (a_m + a_{m+1}(z-a) + \dots + a_{m+n}(z-a)^n + \dots)$, $z \in \Delta(a,r)$

Θέτουμε $h(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$ και $h(a) = a_m$

και παρατηρούμε ότι η h έχει μιγ. παράγωγο στο a. Έτσι το m είναι η τάξη της ρίζας a.