Άσκηση 10

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το z_0 με $|z_0-a|=R$ ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0-a)^n$ να συγκλίνει απόλυτα, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε z με $|z-a|=R$

Λύση

Έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z_0-a|^n < +\infty$ δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot R^n < +\infty$, έτσι αν $z\in\mathbb{C}$ ώστε $|z-a|=R$

τότε $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z-a|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot R^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z_0-a| < +\infty$

$\Rightarrow$ Η $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z-a|^n$ συγκλίνει απόλυτα στο $C(a,R)$

Μάθημα 22 — 29/11/2022

Κεφ 4) Μιγαδική Ολοκλήρωση

Ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής
$f:[a,b]\to\mathbb{C}$

$\boxed{\text{Π.χ}}$ 1) $f(t) = (\cos t, \sin t) = \underbrace{\cos t}_{u(t)} + i \underbrace{\sin t}_{v(t)} = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

2) $f(t) = \underbrace{t^2}_{u(t)} + i \underbrace{t^3}_{v(t)} = t^2(1+it)$, $t\in[0,1]$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση $(a,b \in \mathbb{R}, a<b)$. Αν $f = u + iv$ $(u = \mathrm{Re} f, v = \mathrm{Im} f)$ θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, αν οι u και v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Ορίζουμε τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\int_a^b f(x)\,dx$ θα λέγεται ολοκλήρωμα Riemann της f και μερικές φορές θα γράφουμε $\int_a^b f\,dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη (Γενικότερα αν η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένο ή ακόμα και αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών, τότε είναι ολοκληρώσιμη)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Γραμμικότητα του ολοκληρώματος)

Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η πραγματική συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

Απόδειξη

Έστω $f = u + iv$. Τότε είναι σαφές ότι $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$ είναι ολοκληρώσιμη

Θέτουμε $\lambda = \dfrac{\left|\int_a^b f\,dx\right|}{\int_a^b f\,dx}$ (Υποθέτουμε ότι $\int_a^b f\,dx \neq 0$ διαφορετικά δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα)

Τότε $|\lambda| = 1$ και έχουμε

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| = \lambda \int_a^b f\,dx = \int_a^b (\lambda f)\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_a^b \lambda f\,dx\right) =$$

$\in \mathbb{R}$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}(\lambda f)\,dx \leq \int_a^b |\lambda f|\,dx = \int_a^b |f|\,dx$$

Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a < b)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε θέτουμε

$$\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Αλλαγής Μεταβλητής)

Έστω $g:[c,d] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε η g' είναι ολοκληρώσιμη (ιδιαίτερα g' συνεχής στο $[c,d]$). Θέτουμε $I = g([c,d])$

Αν η συνάρτηση $f: I \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής τότε $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad (x = g(t))$

Σημείωση: Η g μπορεί να είναι κατά τμήματα C^1

Υπενθύμιση

Μια συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ λέμε ότι είναι διαφορίσιμη στο $t \in [a,b]$ αν και μόνο αν οι u και v είναι διαφορίσιμες στο t. Τότε ισχύει $f'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση

Ορίζουμε $F:[a,b] \to \mathbb{C}$ με $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$

Τότε:

a) Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$

b) Αν η f είναι συνεχής στο $t \in [a,b]$, τότε η F είναι διαφορίσιμη στο t και $F'(t) = f(t)$

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ (Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, τότε η f έχει παράγουσα στο $[a,b]$.

Δηλαδή υπάρχει $y: [a,b] \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη ώστε $y' = f$.

Τότε $\int_a^b f(x)\,dx = y(b) - y(a)$

<u>Παραδείγματα</u>

1) Η συνάρτηση $f(t) = \begin{cases} e^{\frac{i}{t}} & , t \neq 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$

είναι ασυνεχής (μόνο) στο $t = 0$ αφού το όριο $\lim\limits_{t \to 0} e^{i/t}$ δεν υπάρχει ($t_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n \geq 1$

$t_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \geq 1$ τότε $\lim t_n = \lim t_n' = 0$ και

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} e^{i/t_n} = \lim_{n\to\infty} e^{2n\pi i} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n') = \lim_{n\to\infty} e^{i/t_n'} = \lim_{n\to\infty} e^{i(2n\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \neq 1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{t\to 0} f(t)$$

Όμως η f είναι φραγμένη και αφού έχει μόνο ένα σημείο ασυνέχειας είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

(f φραγμένη γιατί για $t \neq 0$ $|f(t)| = |e^{t\cdot i}| = 1$
για $t = 0$ $|f(t)| = 0 < 1$)

2) $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = 0$, αν $n \in \mathbb{Z}$ και $n \neq 0$

Πράγματι η συνάρτηση $g(t) = \frac{e^{int}}{in}$, $t \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της e^{int}, $t \in \mathbb{R}$
αφού $g'(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{R}$

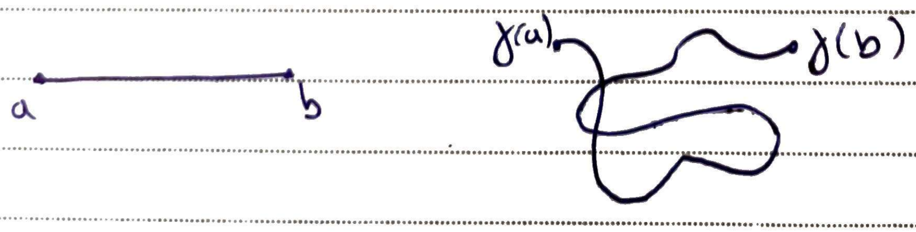
Άρα $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \left.\frac{e^{int}}{in}\right|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi n i} - 1}{in} = \frac{1-1}{in} = 0$

Αν $n = 0$ τότε $e^{int} = e^0 = 1$, $t \in \mathbb{R}$
Άρα $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

<u>Παρατήρηση</u>
Το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt + i\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt$
$(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας
ότι $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt = 0$

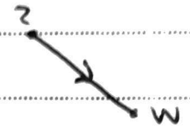
<u>Καμπύλες στο επίπεδο</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$
(όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) λέγεται <u>καμπύλη</u> του $\mathbb{C}$
Η <u>εικόνα</u> ή <u>ίχνος</u> της γ είναι το σύνολο
$[\gamma] = \gamma([a,b])$
Το $\gamma(a)$ λέγεται αρχικό σημείο και το $\gamma(b)$
λέγεται τελικό σημείο της γ



Παραδείγματα

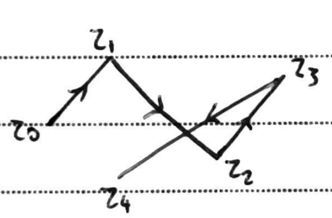
1) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το z στο w, συμβολιζόμενο με $[z,w]$ είναι η καμπύλη $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0,1]$
Το ίχνος αυτής της καμπύλης θα συμβολίζεται επίσης με $[z,w]$



2) Έστω $z_0, z_1, \dots, z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$
Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, \dots, z_n$ είναι η καμπύλη:

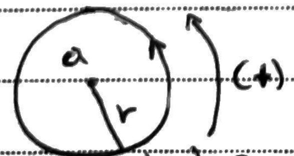
$\gamma : [0,n] \to \mathbb{C}$ ώστε

$$\gamma(t) = (k+1-t) z_k + (t-k) z_{k+1} \quad , t \in [k, k+1], k=0,1,\dots,n-1$$



Η καμπύλη αυτή και το ίχνος της θα συμβολίζεται με $[z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$ ή με $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}$, όπου $\gamma_k = [z_k, z_{k+1}]$, $k = 0,1,\dots,n-1$

3) Η θετικά προσανατολισμένη (ή αντιωρολογιακά) περιφέρεια κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r > 0$ είναι η καμπύλη $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

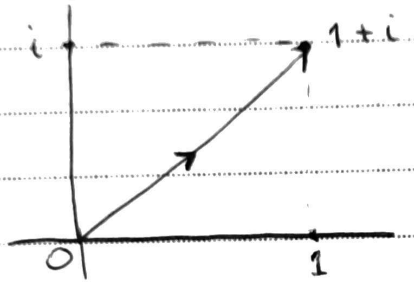


$= (\operatorname{Re} a + r\cos t, \operatorname{Im} a + r\sin t)$

Το ίχνος αυτής της καμπύλης (και η ίδια η καμπύλη) θα συμβολίζεται με $C(a,r)$

Επίσης παρατηρούμε ότι δύο καμπύλες μπορεί να έχουν το ίδιο ίχνος (την ίδια γεωμετρική εικόνα) αλλά διαφορετικές παραμετρήσεις.

__π.χ.__ Οι καμπύλες $\gamma_1(t) = 2(t+it)$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ και $\gamma_2 = t^2 + it^2$, $t \in [0,1]$ έχουν ως ίχνος το ευθύγραμμο τμήμα $\{x + ix : x \in [0,1]\}$ αλλά διατρέχεται από τις καμπύλες $\gamma_1(t)$ και $\gamma_2(t)$ με διαφορετικό ρυθμό.



Επίσης οι καμπύλες $\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$, $\gamma_2(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$, $\gamma_3(t) = e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_4(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ έχουν όλες ως ίχνος τον μοναδιαίο κύκλο $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ οι παραμετρήσεις τους όμως διαφέρουν.

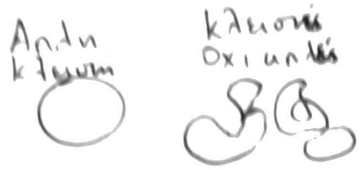
Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη.
Τότε έχουμε:

α) Η γ λέγεται __κλειστή__ αν $\gamma(a) = \gamma(b)$

β) Η γ λέγεται __απλή__ αν είναι 1-1 συνάρτηση στο $[a,b]$

γ) Η γ λέγεται __απλή κλειστή__ καμπύλη αν είναι κλειστή και η γ είναι 1-1 συνάρτηση στο $[a,b)$

δ) Η __αντίθετη__ καμπύλη της γ, συμβολιζόμενη με $-\gamma$ είναι η καμπύλη $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ώστε $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$



<u>Παρατηρούμε</u> ότι καθώς το t αυξάνει από το a στο b, η $-\gamma$ περιγράφει του ιδίου ίχνους καμπύλη ($[\gamma] = [-\gamma]$) αλλά με αντίθετη φορά.

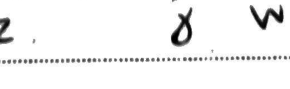
$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$ 1) Η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ είναι απλή κλειστή καμπύλη.

2) Η καμπύλη $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 3\pi]$ (με ίχνος την περιφέρεια κέντρου a και ακτίνας r) δεν είναι κλειστή, αφού $\gamma(0) = a + r \neq a - r = \gamma(3\pi)$, ούτε προφανώς απλή.

3) Έστω $z \neq w$ στο $\mathbb{C}$.
Η πολυγωνική γραμμή $\gamma = [z, w] + [w, z]$ (με ίχνος $[z, w]$) είναι κλειστή, αφού $\gamma(0) = z = \gamma(2)$ αλλά δεν είναι απλή.

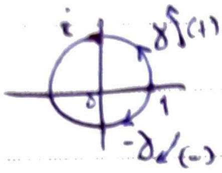
4) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma(t) = t + i f(t)$, $t \in [0,1]$ είναι απλή (όχι κλειστή)

5) a) Έστω $z \neq w \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $\gamma = [z, w]$. Τότε $-\gamma = [w, z]$ και βέβαια οι γ και $-\gamma$ είναι απλές αλλά όχι κλειστές καμπύλες.



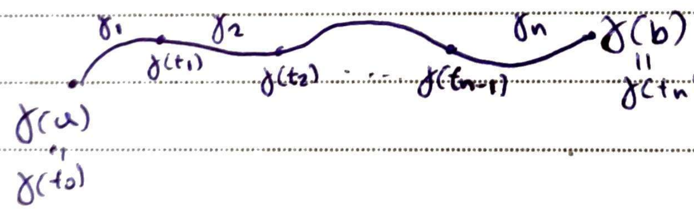
Μοναδιαίος κύκλος με αντίθετη φορά

b) Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Τότε $(-\gamma)(t) = \gamma(2\pi - t) = e^{2\pi i - it} = e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$
Επομένως η $-\gamma$ είναι η αρνητικά προσανατολισμένη μοναδιαία περιφέρεια (μια απλή και κλειστή καμπύλη)



Παρατήρηση

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη
και $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$
διαμέριση του $[a,b]$
Για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ θέτουμε $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$
ώστε $\gamma_k(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$
Γράφουμε τότε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$



Σημειώνουμε ότι το συμβολισμό αυτόν τον έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στην περίπτωση της πολυγωνικής γραμμής $\gamma = [z_0, z_1] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$, $k=1,2,\dots$

Είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω συμβολισμό στην περίπτωση διαδοχικών καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$
Με αυτό εννοούμε ότι το τελικό σημείο της γ_{k-1} συμπίπτει με το αρχικό σημείο της γ_k για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$

Έστω για απλότητα ότι $n=2$ (2 διαδοχικές καμπύλες)

Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$

Τότε έχουμε ότι $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$

Έτσι ορίζουμε τον συνδυασμό της γ_1 με την γ_2 να είναι η $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma : [a, d+b-c] \to \mathbb{C}$ έχει την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , a \le t \le b \\ \gamma_2(t+c-b) & , b \le t \le d+b-c \end{cases}$$

Μετακινήσαμε το παραμετρικό διάστημα της γ_2 από το $[c,d]$ στο $[b, d+b-c]$ προσθέτοντας σε όλα τα σημεία του $[c,d]$ τον αριθμό $b-c$

Επίσης αν γ_1, γ_2 είναι διαδοχικές καμπύλες τότε $[\gamma_1 + \gamma_2] = [\gamma_1] \cup [\gamma_2]$

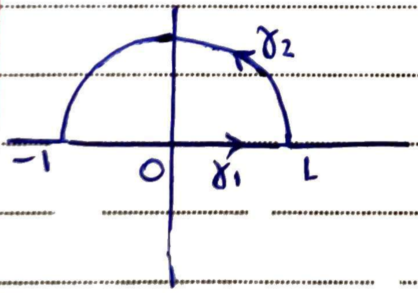
Αυτό ισχύει και για περισσότερες από 2 καμπύλες

Παράδειγμα

Έστω $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0,1]$ και $\gamma_2(t) = e^{it}$, $t \in [0,\pi]$

Τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ έχει την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & , 0 \le t \le 1 \\ e^{i(t-1)} & , t \in [1, 1+\pi] \end{cases}$$



$\gamma(0) = 0$

$\gamma(1+\pi) = -1$