ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

16º Μάθημα

18/11/22

Παρατήρηση

Το γεγονός ότι το Θ Cauchy-Hadamard δεν μπορεί να αποφανθεί για την σύγκλιση της δυναμοσειράς στον κύκλο σύγκλισης $|z-a| = R$ φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Οι δυναμοσειρές α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ β) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ και γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ έχουν ακτίνα σύγκλισης 1

Πράγματι $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}$ $\left(a_n = \frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1}{\limsup \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2} = \frac{1}{1} = 1$ και όμοια για τις άλλες δύο έχω $R = 1$ (ακτίνα σύγκλισης)

α) Στον κύκλο $|z| = 1$ ισχύει:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ $\Rightarrow$ έχουμε απόλυτη σύγκλιση στον κύκλο σύγκλισης

Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στον $\overline{\Delta}(0,1)$ (γιατί;;;)

β) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει σε κάθε σημείο του κύκλου $|z| = 1$, αφού $|z|^n = 1$ $\forall$ $n \geq 1$
($\Rightarrow z^n \not\to 0$ όταν $|z| = 1$)

γ) Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ παρατηρούμε ότι αν $z = 1$ τότε η σειρά $\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ αν $z = -1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει ως εναλλάσσουσα, αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα.
(Παρατήρηση: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ για $|z| = 1$ και $z \neq 1$ συγκλίνει)

(2) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n}$

$\left(\text{Αν } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{k_n} \text{ τότε } R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k_n]{|a_n|}} \right)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$: $a_n = 1$, $k_n = 2^n \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{1} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n}$: $k_n = 2n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

Για $n \geq 0$ έχουμε: $\sqrt[2n]{|a_n|} = \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}}$

Αλλά $\forall\, n \geq 0$: $\sqrt[2n]{(2n)!} \geq \sqrt[2n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} \geq$
$\geq \sqrt[2n]{n^n} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$$\Rightarrow \sqrt[2n]{(2n)!} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt[2n]{|a_n|} \longrightarrow 0 \Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty$$

(3) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\Delta(0,1)$ αλλά η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^3}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta(1,1)}$.

Πράγματι, η πρώτη είναι η γεωμετρική σειρά με ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\Delta(0,1)$ διότι η ακολουθία συναρτήσεων $\varphi_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, $z \in \Delta(0,1)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην σταθερή συνάρτηση $\varphi(z) = 0$, $z \in \Delta(0,1)$.

$\left[\sup\limits_{z\in\Delta(0,1)} |\varphi_n(z) - \varphi(z)| = \sup\limits_{|z|<1} |z|^n = 1 \not\to 0 \Rightarrow \varphi_n \overset{ομ.}{\not\to} \varphi \equiv 0 \right]$

Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει επίσης ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και επειδή $\frac{|z-1|^n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ για $|z-1| \leq 1$.

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty \Rightarrow$ Από το κριτήριο Weierstrass η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^3}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\overline{\Delta(1,1)}$

Πρόταση: Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $a_n \neq 0 \ \forall \ n \geq 0$. Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \exists$ στο $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Αποδ.

Θέτουμε $a = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ και παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \exists$ επίσης στο $\overline{\mathbb{R}}$ και μάλιστα $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{a}$

Έστω $z \in \mathbb{C}$.

α) Αν $0 < |z| < a$ τότε $\limsup \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \cdot \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$= |z| \cdot \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{a} < 1.$

άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα (κριτήριο λόγου)

β) Αν $a < |z|$ τότε $\liminf \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \cdot \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$

$= |z| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{a} > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει. Από το θεώρημα Cauchy-Hadamard έπεται ότι αναγκαία η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=a$

Παραδείγματα

Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

α) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^3+2) z^n$

β) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+3)^n$

γ) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

δ) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z-1)^n$

ε) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} z^n$

όπου $0 < a < +\infty$

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα

α) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)^3+2} = 1$

β) $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$

$(n+1)$

γ) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

δ) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ε) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$

Παρατηρούμε ότι $\forall\ R \in [0, +\infty]$ $\exists$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης ίση με R.

★ Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Θέτουμε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z\in \Delta(a,R)$

Τότε η f είναι συνεχής στον ανοικτό δίσκο $\Delta(a,R)$

Πράγματι αν $z\in\Delta(a,R)$ τότε επιλέγουμε $r>0$: $|z-a|<r<R$ και από το Θ. Cauchy-Hadamard η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του $\Delta(a,r)$

Θα δείξουμε τώρα ισχυρότερο.
Η f είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,R)$ και η f' είναι επίσης δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης και το ίδιο κέντρο. Ιδιαίτερα έπεται ότι μια δυναμοσειρά έχει παραγώγους κάθε τάξης.

Θεώρημα: (Διαφόρισης Δυναμοσειράς)

Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η f είναι ολόμορφη συνάρτηση στον $\Delta(a,R)$ και ισχύει ότι $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n (z-a)^{n-1}$, $z\in\Delta(a,R)$
(Δηλ. η δυναμοσειρά διαφορίζεται όρο προς όρο)

$$f'(z)=(a_0)'+(a_1(z-a))'+\dots+(a_n(z-a)^n)'+\dots=$$
$$=a_1+2a_2(z-a)+\dots+n a_n (z-a)^{n-1}+\dots \quad \text{για } |z-a|<R$$

Αποδ. Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $a=0$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με R. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $z\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n z^{n-1}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \quad (1)$$

Έπεται ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R'.

Όμως $$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\underbrace{\lim \sqrt[n]{n}}_{1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

• Έστω τώρα $z_0 \in \Delta(0,R)$. Θ.δ.ο. η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 και $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

Έστω $r \in \mathbb{R}$ ώστε $|z_0| < r < R$. Θέτουμε $\varphi_1(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$ και $\forall\ k \geq 2$ $\varphi_k(z) = z^{k-1} + z_0 z^{k-2} + \dots + z_0^{k-2} z + z_0^{k-1}$, $z \in \mathbb{C}$.
και παρατηρούμε ότι $|\varphi_k(z)| \leq |z^{k-1}| + |z_0 z^{k-2}| + \dots + |z_0^{k-2} z| + |z_0^{k-1}|$ ②
$\leq k \cdot r^{k-1}$, για $|z| \leq r$

Έστω $z \in \overline{\Delta(0,r)}$. Τότε έχουμε $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0) \varphi_n(z) = (z - z_0) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)}_{\varphi(z)}$ ③

② $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |\varphi_n(z)| \underset{②}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < +\infty$, $\forall\ |z| \leq r$ ④
(: η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ συγκλίνει απόλυτα για $|z| < R$ και άρα για $z = r < R$!!)

Η ④ μαζί με το κριτήριο Weierstrass δίνουν ότι η σειρά συναρτήσεων $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\Delta(0,r)$ και έτσι η φ είναι συνεχής στον $\Delta(0,r)$, ιδιαιτέρως η φ είναι συνεχής στο z_0 $(z_0 \in \overline{\Delta(0,r)})$.
Έπεται τώρα από την ③ και την παρατήρηση του Καραθεοδωρή ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 και επιπλέον ότι $f'(z_0) = \varphi(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n z_0^{n-1})$
$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z_0^{n-1}$